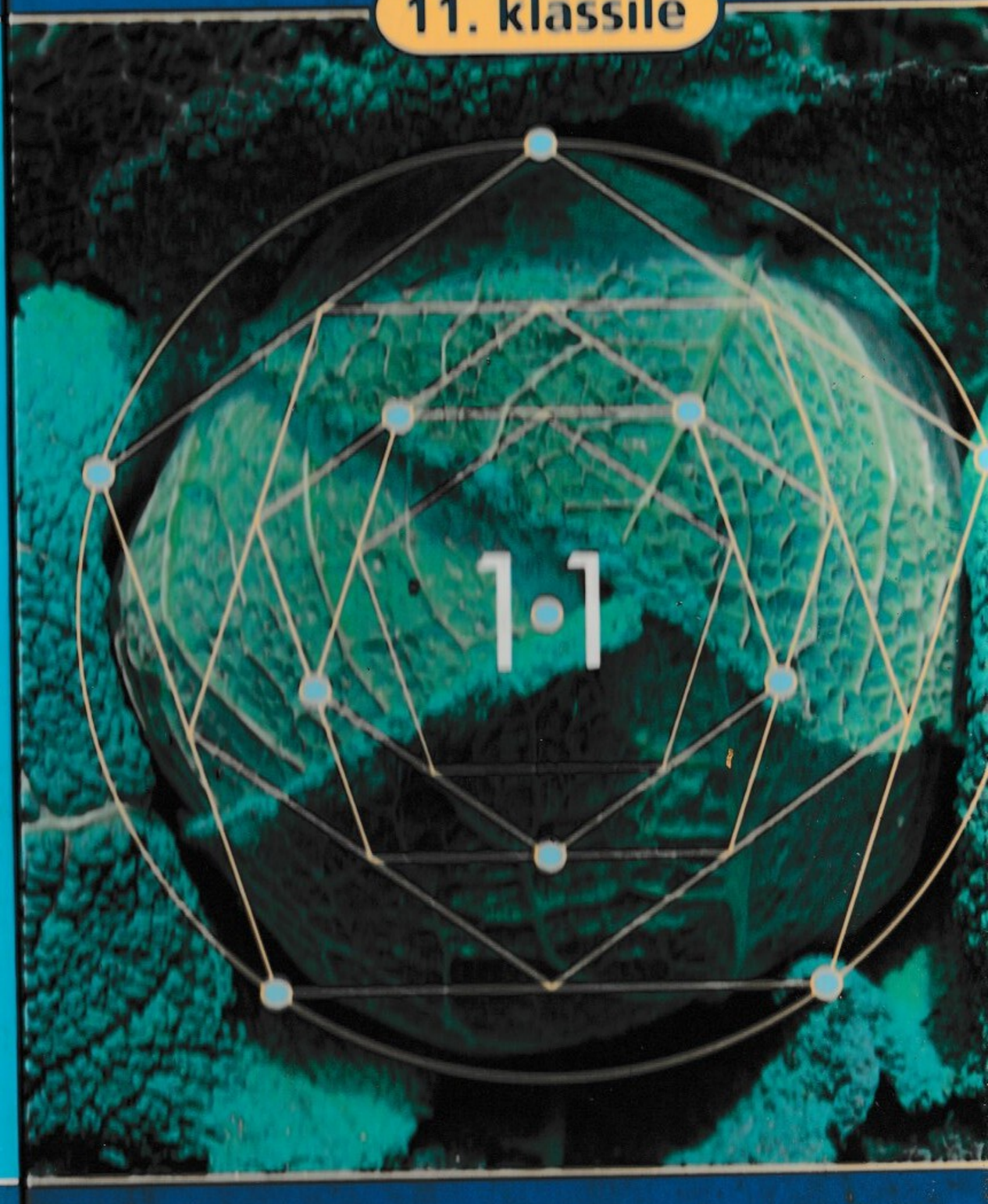
11

MATEMAATIKA

MATEMAATIKA

11. klassile



Lea Lepmann • Tiit Lepmann • Kalle Velsker

MATEMAATIKA

11. klassile

KOOLIBRI

Käesolev õpik sisaldab teooriat ja ülesandeid järgmiste gümnaasiumi matemaatika kursuste kohta.

1. Jadad. Funktsioonid I.
2. Funktsioonid II.
3. Funktsiooni piirväärtus ja tuletis.
4. Tuletise rakendused.

Samade autorite X klassi õpiku traditsiooni jätkavalt on õpikus eristatud A ja B raskusastme ülesanded. Osa õpiku teemasid on varustatud tärnikesega. Need teemad ei kuulu riikliku õppekavaga fikseeritud kõigile õpilastele kohustusliku materjali hulka ja on mõeldud õpetamiseks lisakursustena. Kõik see võimaldab õpikut kasutada nii kitsa kui ka laia kursuse õppijatel. Iga peatüki lõpus on toodud valik küsimusi ja ülesandeid enesekontrolliks. Nendele küsimustele vastamine ja ülesannete lahendamine võimaldab õppijal selgusele jõuda selles, kas põhiline nõutavast materjalist on omandatud. Õpiku lõpus on esitatud kogu läbitud materjali kordavad ülesanded ja õpiku ülesannete vastused.

Autorid tänavad dotsent Aleksander Monakovit kasulike nõuannete eest, mida on arvestatud õpiku ümbertöötamisel.

Haridusministeerium kinnitab: õpik vastab riiklikule õppekavale.

Retsenseerinud Endel Jürimäe ja Aita Raudsepp

Kaas: Mart Anderson

Joonised: Toomas Kilgas

Toimetaja Toomas Kilgas

Kunstiline toimetaja Mart Anderson

Küljendaja Gädvi Kuklase

2., parandatud trükk

Tallinn, 2001

ISBN 9985-0-1093-0

© Lea Lepmann, Tiit Lepmann, Kalle Velsker, 2001.

© Kirjastus Koolibri, 2001

Kõik õigused on kaitstud. Ilma autoriõiguse omaniku eelneva kirjaliku loata pole lubatud ühtki selle raamatu osa paljundada ei elektroonilisel, mehaanilisel ega muul viisil.

Postiaadress: AS Koolibri, pk 223, 10503

Asukoht: Pärnu mnt 10, Tallinn

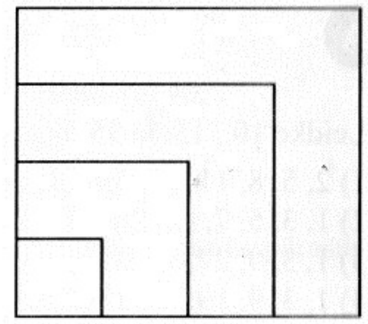
1. JADAD

1.1. JADA MÕISTE

Näide 1.

Ants joonistab arvutiekraanile mustrit ühise tipuga ruutudest, mille küljepikkusteks on järjestikused naturaalarvud alates 1-st (joon. 1.1). Kuue esimese ruudu pindalad koos ruudu järjekorranumbriga on järgmised:

Ruudu nr.	1	2	3	4	5	6
Pindala	1	4	9	16	25	36



Joon. 1.1

Ruutude joonistamist võib jätkata ja ühtlasi leida, milline on igal sammul joonistatud ruudu pindala. Näiteks 12-nda ruudu pindala on 144, 20-nda ruudu pindala 400 jne., üldiselt n-nda ruudu pindala on n^2.

Näites 1 tekkis järjekorranumbritega (indeksitega) varustatud arvude hulk ehk arvjada. Selle arvjada elementideks on ruutude pindalad, esimene element on $1^2 = 1$, teine element $2^2 = 4$, kolmas element $3^2 = 9$, n-is element n^2.

Kui igale naturaalarvule n (alates 1-st) seatakse teatud reegli järgi vastavusse üks kindel arv a_n, siis saadakse arvjada.

Tavaliselt kasutatakse nimetuse "arvjada" asemel lihtsalt nimetust "jada". Arvud $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ on jada elemendid ehk jada liikmed. Iga liikme indeks näitab, mitmenda liikmega jadast on tegemist. Lühemalt võib jada $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ tähistada sümboliga (a_n) või $\{a_n\}$. Jada definitsioonist nähtub, et jada on lõpmatu hulk ja et jada igal liikmel on kindel järjekorranumber.

Jada suvalisele indeksile n vastavat liiget a_n nimetatakse **jada üldliikmeks**. Jada üldliige esitatakse tavaliselt valemiga, mis näitab, kuidas jada mistahes liige avaldub selle liikme järjekorranumbri n kaudu. Näites 1 esitatud jada üldliige on $a_n = n^2$.

Mõnede jadade üldliiget ei ole võimalik esitada valemiga. Selline on näiteks algarvude jada 2; 3; 5; 7; 11; 13; … .

Näide 2.

Kolmega jaguvate positiivsete arvude jada on 3, 6, 9, …, $3n$, … . Antud jadas $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 9$ jne., $a_n = 3n$.

Näide 3.

On antud jada (a_n) üldliikmega $a_n = \frac{n}{n+1}$. Leiame selle jada 5 esimest liiget.

Selleks asendame üldliikme valemisse n asemele 1, 2, …, 5 ja saame

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3},\ a_3 = \frac{3}{4},\ a_4 = \frac{4}{5},\ a_5 = \frac{5}{6}.$$

A

1. Leidke 10., 15. ja 35. liige järgmistes jadades:
   1) 2, 5, 8, 11, …, $3n - 1$, …;
   2) 1, 3, 5, 7, …, $2n - 1$, …;
   3) 1, 3, 9, 27, …, 3^{n-1}, …;
   4) 1, 3, 9, 19, …, $1 + 2(n-1)^2$, …;
   5) 1, 3, 9, 16, …, $8n + \frac{12}{n} - 19$, …;
   6) 2, 5, 10, 17, …, $n^2 + 1$, … .
2. Jada üldliige on $a_n = (-1)^{n+1} n^2$. Leidke selle jada liikmed a_6, a_7, a_8.
3. Leidke jada viis esimest liiget, kui
   1) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; 2) $a_n = 2n + 1$;
   3) $a_n = n(1 - 2^n)$; 4) $a_n = 2(1+n)^2 - 3$.
4. Jada üldliige on $a_n = \frac{2n+5}{n-8}$. Leidke a_{n-2}, a_{n-1}, a_{n+1}.
5. Esitage jada 4 esimest liiget ja üldliige, kui jada liikmeteks on
   1) paarisarvud alates arvust 4;
   2) 6-ga jaguvad arvud alates arvust 6;
   3) 6-ga jaguvad arvud alates arvust 24;
   4) 1-st suuremad arvud, mis 3-ga jagamisel annavad jäägi 1;
   5) 10-st suuremad arvud, mis 7-ga jagamisel annavad jäägi 4.

6. Mitmes liige on arv 1,75 jadas, mille üldliige on $a_n = \frac{2n}{n+1}$?
7. Jada üldliige on $a_n = \frac{3-4n}{n^2+5}$. Mitmes liige jadas on arv
   1) $-\frac{41}{126}$; 2) $-\frac{17}{30}$; 3) $-\frac{37}{105}$; 4) $-\frac{65}{294}$?

B

8. Leidke jadas indeks, millest alates jada liikmed on negatiivsed.
   1) $a_n = 25 - 12n$; 2) $a_n = -5n^2 + 35n + 39$;
   3) $a_n = -2(n - 12{,}5)(n + 7)$; 4) $a_n = \frac{18-5n}{3n+17}$.
9. Leidke jadas indeks, millest alates jada liikmed on suuremad kui 40.
   1) $a_n = 8n + 7$; 2) $a_n = 3n^2 - 26n$; 3) $a_n = \frac{n+2}{n+3}$.
10. On antud jada 4 esimest liiget. Leidke jada moodustamise seaduspärasus. Esitage jada viies ja kuues liige ning üldliige.
    1) 4, 5, 6, 7, …; 2) –2, –4, –6, –8, …;
    3) 1, –1, 1, –1, …; 4) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$, …;
    5) –2, 4, –6, 8, …; 6) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{8}{9}, \frac{11}{12}$, … .
11. Leidke valem summa $2 + 6 + 10 + \ldots + (4n - 2)$ arvutamiseks.
    1. Leidke esmalt järgmised summad: a) 2 + 6; b) 2 + 6 + 10; c) 2 + 6 + 10 + 14; d) 2 + 6 + 10 + 14 + 18.
    2. Püstitage hüpotees summa kohta ja tõestage see matemaatilise induktsiooniga.
12. Tõestage matemaatilise induktsiooni abil.
    1) $8 + 16 + 24 + \ldots + 8n = 4n(n+1)$;
    2) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;
    3) $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$;
    4) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

13. Iga kord ei ole jada üldliige antud mitte liikme järjekorranumbri kaudu, vaid jada eelnevate liikmete kaudu. Sel juhul öeldakse, et jada on antud **rekurrentse seosega**[1]. Leidke rekurrentse seosega esitatud jada 5 esimest liiget.

1) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n - 5$;

2) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$;

3) $a_1 = 4, a_{n+1} = a_n^2 - 1$;

4) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

14. Leidke a_{1997}, kui $a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

15. Arvjada, milles $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, nimetatakse **Fibonacci jadaks**.
1. Kirjutage välja jada 15 esimest liiget.
2. Leidke summad $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, …, $a_1 + a_2 + \ldots + a_8$.
3. Näidake, et Fibonacci jadas kehtib seos $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_{n+2} - 1$.
4. Leidke jadas 3-ga jaguvad liikmed. Kuidas paiknevad need liikmed jadas? Tõestage leitud seos matemaatilise induktsiooni abil.

1.2. TÕKESTATUD JA TÕKESTAMATA JADAD

Järgnevas uurime erinevate jadade käitumist, kui jada liikme indeks n tõkestamatult kasvab.

Vaatleme kõigepealt järgmisi jadasid.

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$;

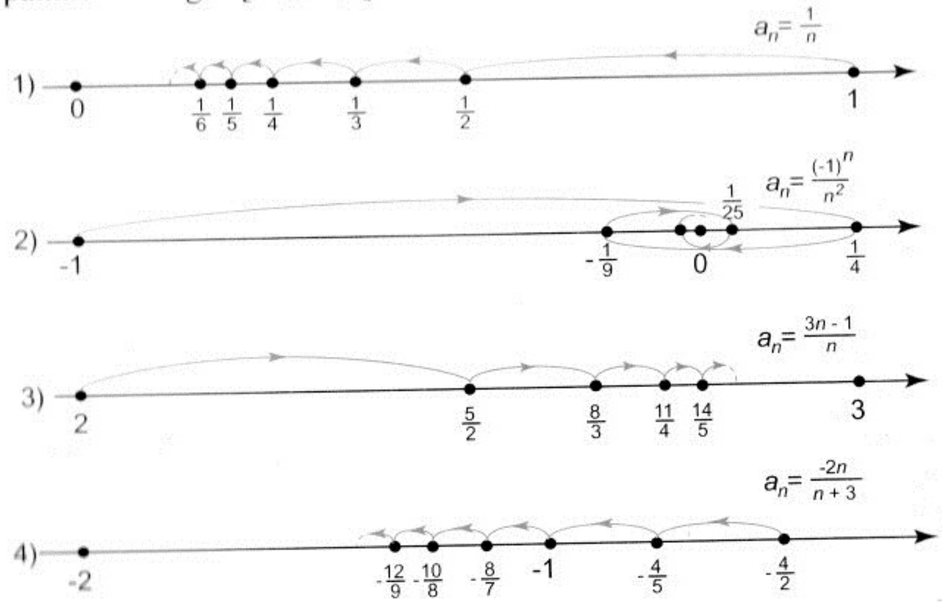
2) $-1, \frac{1}{4}, \frac{-1}{9}, \frac{1}{25}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n^2}, \ldots$;

3) $2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \ldots, \frac{3n-1}{n}, \ldots$;

4) $\frac{-2}{4}, \frac{-4}{5}, \frac{-6}{6}, \frac{-8}{7}, \ldots, \frac{-2n}{n+3}, \ldots$.

Kujutame nende jadade esimesed liikmed arvteljel (joon. 1.2). *Leidke igas jadas veel a_{50} ja a_{100} ning määrake nende asukoht arvteljel.*

Näeme, et nende jadade liikmed asuvad alati mingis lõigus. Näiteks jadas 1 järjest kaugemale minnes lähenevad jada liikmed järjest enam arvule 0 (paremalt) ning jada liikmed paiknevad lõigus [0; 1]. Jada 2 liikmed lähenevad indeksi n kasvades samuti arvule 0 (pendeldades), jada liikmed paiknevad lõigus $[-1; \frac{1}{4}]$. Jada 3 liikmed lähenevad järjest enam arvule 3, jada liikmed asuvad lõigus [2; 3]. Jada 4 liikmed lähenevad arvule –2, jada liikmed paiknevad lõigus [–2; –0,5].



Joon. 1.2

Lühemalt, sümbolites kirjutatuna võime jadasid 1–4 iseloomustada järgmiselt.

Jada 1: kui $n \to \infty$, siis $a_n \to 0$ (loetakse nii: *kui n läheneb lõpmatusele, siis a_n läheneb nullile*),

jada 2: kui $n \to \infty$, siis $a_n \to 0$,

jada 3: kui $n \to \infty$, siis $a_n \to 3$,

jada 4: kui $n \to \infty$, siis $a_n \to -2$.

Kui leiduvad arvud *a* ja *b* nii, et jada liikmed a_n asuvad iga *n* korral lõigus [*a*; *b*], siis nimetatakse jada (a_n) tõkestatud jadaks.

Näide 1.

Näitame, et jada 3 iga liige kuulub tõepoolest lõiku [2; 3]. Selleks teisendame jada üldliikme avaldist järgmiselt: $\frac{3n-1}{n} = \frac{3n}{n} - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{n}$. Viimasest avaldisest on näha, et selle väärtus on alati tõepoolest väiksem kui 3 (miks?). Et murru $\frac{1}{n}$ suurim väärtus saab olla 1 (kui $n = 1$), siis $3 - \frac{1}{n} \geq 2$. Seega oleme kokkuvõttes näidanud, et jada 3 liikmed asuvad lõigus [2; 3].

Meie kursuse järgnevates osades on tihti tegemist selliste jadadega, mille liikmed lähenevad nullile, kui jadas järjest kaugemale minna. Nendele tõkestatud jadadele on antud omaette nimetus.

[1] *Recurrere* – ladina keeles *tagasi jooksma*.

Jada nimetatakse hääbuvaks ehk nullile lähenevaks, kui jadas järjest kaugemale minnes selle jada liikmed erinevad nullist kuitahes vähe.

Vaatleme järgnevalt jadasid 5–9.

5) $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots$;

6) $-2, -\frac{11}{2}, -\frac{26}{3}, -\frac{47}{4}, \ldots, \frac{1-3n^2}{n}, \ldots$;

7) $-1, 4, -9, 16, \ldots, (-1)^n n^2, \ldots$;

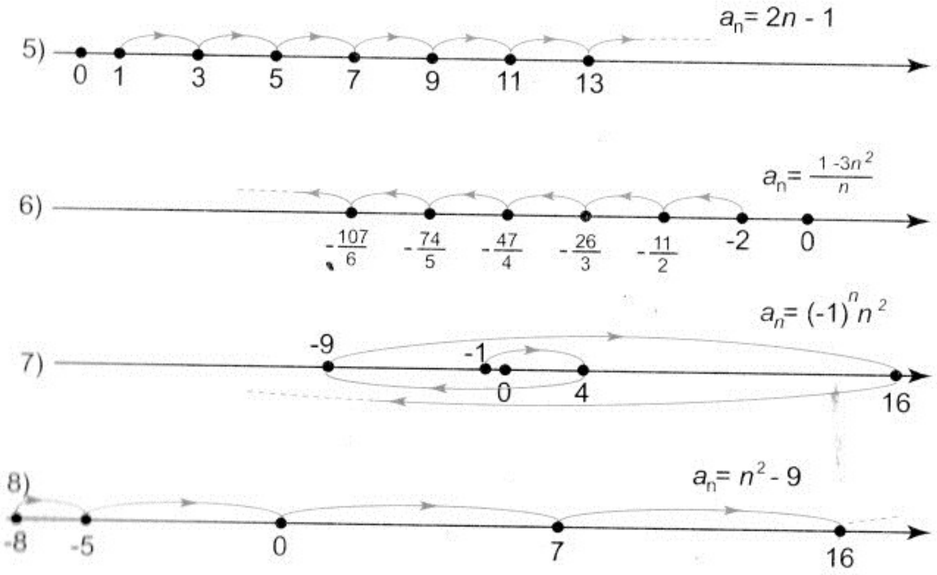
8) $-8, -5, 0, 7, 16, \ldots, n^2-9, \ldots$;

9) $1, 0, 4, 0, 9, 0, 16, 0, \ldots$.

Kujutame ka nende jadade esimesed liikmed arvteljel (joon. 1.3). *Leidke veel a_{50} ja a_{100} ning määrake nende asukoht arvteljel.* Jadad 5 ja 9 sisaldavad vaid positiivseid liikmeid ja nulli, jada 6 ainult negatiivseid liikmeid, 7. ja 8. jadas on nii positiivseid kui ka negatiivseid liikmeid. Ühine kõigile nendele jadadele on see, et ükski neist pole tõkestatud.

Jada, mis ei ole tõkestatud, nimetatakse tõkestamata jadaks.

Tõkestamata jadadele on iseloomulik järgmine omadus: ükskõik kui suure positiivse arvu M me ette annaksime, ikka leidub tõkestamata jadas selline liige a_n, mis asub arvteljel nullpunktist kaugemal kui M (ehk $|a_n| > M$).



Joon. 1.3.

Näide 2.

Näitame, et jadas 5 leidub selline järjekorranumber n, et iga järgneva n korral $a_n > 1000$. Selleks lahendame võrratuse $2n - 1 > 1000$, millest $2n > 1001$ ja $n > 500{,}5$. Seega esimene naturaalarvuline lahend antud võrratusel on 501. *(Miks otsime võrratuse naturaalarvulisi lahendeid?)* Tõepoolest, antud jadas $a_{501} = 2 \cdot 501 - 1 = 1001$, mis on suurem kui 1000. Ka jada kõik järgnevad liikmed on suuremad kui 1000: $a_{502} = 1003$, $a_{503} = 1005$ jne. Arvu 1000 asemel võib vaadelda mistahes arvu ja analoogilise arutelu teel näha, et jadas 1 üldliige $a_n \to \infty$.

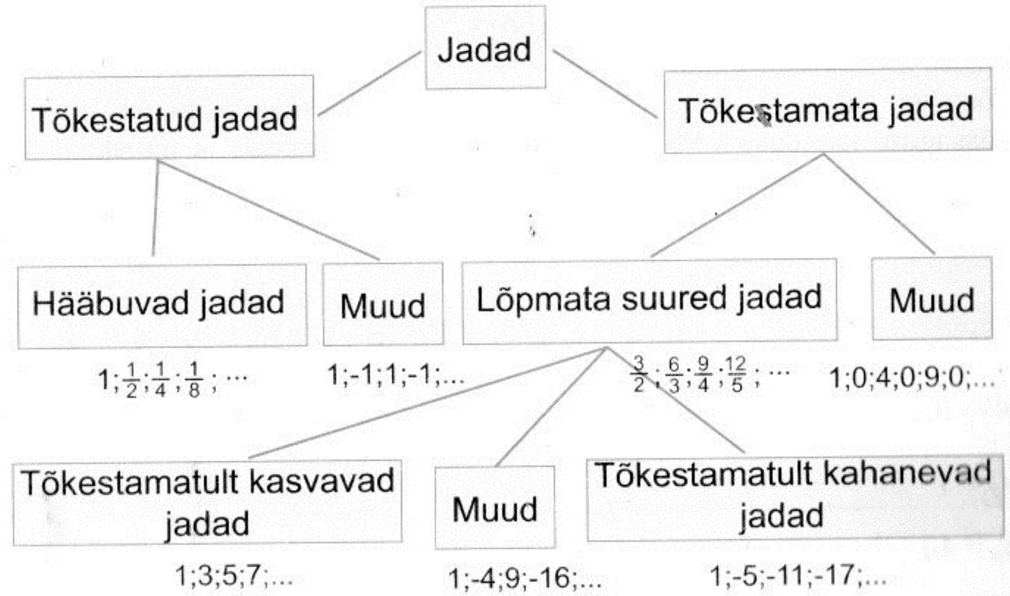
* Mõned tõkestamata jadad on sellised, kus alati küll leidub indeks n nii, et $|an| > M$, kuid jada järgnevate liikmete seas leidub ka liikmeid, mille korral see võrratus rahuldatud ei ole. Selline on näiteks jada 1, 0, 4, 0, 9, 0, 16, … . Teised tõkestamata jadad on sellised, kus võrratus $|an| > M$ on teatud kohast alates rahuldatud jada iga järgneva liikme korral. Uurime selliseid jadasid lähemalt.

Moodustame uued jadad, mille liikmeteks on jadade 5–8 liikmete absoluutväärtused. *Kujutage jadade 5–8 liikmete absoluutväärtustest moodustatud jadade esimesed 7 liiget arvteljel. Leidke a_{50}, a_{100}. Määrake nende asukoht arvteljel.*

Näeme, et jadade 5–8 liikmete absoluutväärtustest moodustatud jadades järjest kaugemale minnes jada liikmed suurenevad tõkestamatult. Sellise omadusega tõkestamata jadasid nimetatakse lõpmata suurteks jadadeks.

Jada nimetatakse lõpmata suureks, kui selle liikmete absoluutväärtustest moodustatud jadas järjest kaugemale minnes jada liikmed suurenevad tõkestamatult, s.t. saavad ja jäävad teatud kohast alates suuremaks igast kuitahes suurest etteantud positiivsest arvust.

Sümbolites kirjutatakse seda järgmiselt: $|a_n| \to \infty$, kui $n \to \infty$. Niisuguseid jadasid, kus $a_n \to \infty$, nimetatakse **tõkestamatult kasvavateks** ja jadasid, kus $a_n \to -\infty$, nimetatakse **tõkestamatult kahanevateks** jadadeks. Nii on jadad 5 ja 8 tõkestamatult kasvavad, jada 6 tõkestamatult kahanev, jadad 7 ja 9 pole ei tõkestamatult kasvavad ega tõkestamatult kahanevad.*



A

16. Tooge 3 näidet tõkestamata jada ja tõkestatud jada kohta.

17. On antud järgmised jadad:

1) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \ldots$;

2) $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{6}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \ldots$;

3) 7, 12, 17, 22, 27, ...

1. Uurige, kas jadad on tõkestamata või tõkestatud. Leidke ka a_{50}, a_{100}.
2. Leidke jadade üldliikmete valemid.

18. Kujutage järgmiste jadade 5 esimest liiget arvteljel. Missugused jadadest on tõkestatud, missugused tõkestamata? Millele läheneb a_n, kui $n \to \infty$?

1) $a_n = \frac{3}{2n+1}$, 2) $a_n = \frac{n^2+3}{2n}$, 3) $a_n = 1 - 3n$,

4) $a_n = \frac{n}{n+1}$, 5) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$, 6) $a_n = \frac{4n-1}{2n}$.

19. On antud järgmised jadad:

1) $a_n = \frac{7}{2n-1}$, 2) $a_n = \frac{2}{n^2+3}$,

3) $a_n = \frac{10}{n^2}$, 4) $a_n = \frac{n+1}{n^3}$.

1. Arvutage jada neli esimest liiget. Mitmendast liikmest alates on jada järgnevad liikmed väiksemad kui 0,001?
2. Kuidas nimetatakse antud jadasid?
3. Võrrelge jadade 1 ja 2 (lk. 6) ning antud jadade üldliikme valemeid. Missuguse järelduse võib teha n astendaja kohta lugejas ja nimetajas kõigi nende jadade korral?

B

20. Leidke indeks n, millest alates kehtib võrratus $|a_n| > 10^4$.

1) $a_n = 3 - 5n$; 2) $a_n = \frac{n^2+3}{2n}$;

3) $a_n = 4n + 3$; 4) $a_n = 1 - n^2$.

1.3. ARITMEETILINE JADA

21. On antud järgmised jadad:

1, 3, 5, 7, 9, ...
12, 8, 4, 0, –4, ...
–2, –5, –8, –11, –14, ...
$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \ldots$.

1. Jätkake antud jadasid.
2. Mida ühist märkate antud jadades, võrreldes järjestikuseid liikmeid?
3. Leidke jada üldliige. Võrrelge neid.

Jada, milles iga liikme ja sellele eelneva liikme vahe on konstantne, nimetatakse aritmeetiliseks jadaks[1].

Konstantset arvu $a_n - a_{n-1}$ nimetatakse **aritmeetilise jada vaheks** ja tähistatakse tähega d. Seega $a_n = a_{n-1} + d$ iga $n > 1$ korral.

Näide.

Jada 7, 12, 17, 22, ..., $5n + 2$, ... on aritmeetiline jada, sest $12 - 5 = 17 - 12 = 22 - 17 = \ldots = 5$. Selle jada vahe $d = 5$.

Kõik aritmeetilised jadad, kus $d \neq 0$, on tõkestamata jadad. Kui $d > 0$, siis $n \to \infty$ korral $a_n \to \infty$. Kui $d < 0$, siis $n \to \infty$ korral $a_n \to -\infty$.

Kui $a_1 = 1$ ja $d = 1$, saame aritmeetilise jada 1, 2, 3, 4, ..., n, ...

Kui $a_1 = 3$ ja $d = 0$, saame aritmeetilise jada 3, 3, 3, ... See on **konstantne jada**.

1.3.1. ARITMEETILISE JADA ÜLDLIIGE

Kui on teada aritmeetilise jada esimene liige a_1 ja jada vahe d, siis on võimalik leida jada mistahes liiget:

$a_2 = a_1 + d$,
$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$,
$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$,
ehk üldiselt $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Teoreem. **Aritmeetilise jada (a_n) üldliige avaldub kujul $a_n = a_1 + (n-1)d$.**

[1] Aritmeetilist jada nimetatakse ka aritmeetiliseks progressiooniks.

Tõestus.

Tõestame teoreemi matemaatilise induktsiooni abil.

1. Kontrollime väite tõesust $n = 1$ ja $n = 2$ korral:

$a_1 = a_1 + (1 - 1)d = a_1$

$a_2 = a_1 + (2 - 1)d = a_1 + d$

Näeme, et mõlemal juhul väide kehtib.

2. Oletame, et väide kehtib mingi naturaalarvu k korral, s.t. et $a_k = a_1 + (k - 1)d$. Näitame, et sellel eeldusel kehtib väide ka $n = k + 1$ korral. Peame näitama, et $a_{k+1} = a_1 + [(k + 1) - 1]d = a_1 + kd$.

Tõepoolest $a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd - d + d = a_1 + kd$.

Seega kehtib väide iga naturaalarvu $n > 0$ korral. ■[1]

Näide 1.

Olgu aritmeetilises jadas teada $a_8 = 172$ ja $a_1 = -3$. Leiame aritmeetilise jada vahe d.

Et $a_8 = a_1 + 7d$, siis $7d = a_8 - a_1 = 172 + 3 = 175$ ja $d = 25$.

Näide 2.

Leiame, mitmes liige on arv 100 aritmeetilises jadas, milles $a_1 = 2$ ja $d = 2$.

Valemist $a_n = a_1 + (n - 1)d$ saame, et

$$n - 1 = \frac{a_n - a_1}{d}, \quad n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{100 - 2}{2} + 1 = 50.$$

A

22. Kontrollige, kas jada on aritmeetiline. Jaatava vastuse korral leidke vahe d.

1) $5, -1, -7, -13, \ldots$;
2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$;
3) $12, 4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$;
4) $2, 8, 14, 20, \ldots$.

23. Arvutage aritmeetilise jada viis esimest liiget.

1) $a_1 = 3, d = 4$;
2) $a_2 = 5, d = -2$;
3) $a_1 = 0{,}8, d = -1{,}2$;
4) $a_5 = -16, d = -3$;
5) $a_3 = \frac{1}{3}, d = \frac{1}{3}$;
6) $a_4 = 5\frac{3}{4}, d = 7\frac{1}{4}$.

24. Leidke aritmeetilise jada 19. liige ja n-is liige.

1) $1{,}5; 3; 4{,}5; \ldots$;
2) $15, 13, 11, \ldots$;
3) $-8; -6{,}5; -5; \ldots$;
4) $2, 4, 8, \ldots$.

[1] Tõestuse lõpp.

25. Leidke tabelis puuduvad arvud.

a_1	d	n	a_n
15	–3	10	
–21	4	25	
–9		11	21
–8		15	–29
23	–5		–22
–16	3		20

26. On antud järgmised funktsioonid:

1) $y = -2x + 1$;
2) $y = 1 - x^2$;
3) $y = \frac{x}{x+1}$;
4) $y = 3(1 + x)$;
5) $y = \frac{2}{x}$;
6) $y = 4x + 1$.

1. Esitage antud funktsioonidega määratud jadade 4 esimest liiget ja n-is liige. Selleks andke argumendile x järjestikuseid naturaalarvulisi väärtusi 1, 2, 3, 4 ja n.
2. Missugused saadud jadadest on aritmeetilised jadad? Kuidas nimetatakse neid määravaid funktsioone?
3. Kuidas avalduvad saadud aritmeetiliste jadade vahed esialgse funktsiooni valemis olevate kordajate kaudu?
4. Kas punktides 2 ja 3 leitu kehtib iga sellist liiki funktsiooni korral? Defineerige aritmeetiline jada vastava funktsiooni väärtuste jada kaudu.

27. Kaldpinnal veerev keha läbis 1. sekundiga 6 m ning iga järgneva sekundiga 0,5 m võrra rohkem kui eelmise sekundiga. Kui pika tee läbis keha 10. sekundiga?

28. Jalgrattur sõidab esimese tunniga 20 km, iga järgneva tunniga aga 0,8 km vähem kui eelmisega. Mitu tundi sõidab jalgrattur, kui ta viimase tunniga läbib 16 km?

29. Leidke aritmeetilise jada esimene liige ja vahe, kui

1) $a_3 = 60, a_6 = 78$;
2) $a_5 = 100, a_{10} = 50$;
3) $a_1 + a_2 = 19$, $a_6 + a_8 = 74$
4) $a_2 + a_4 = 16$, $a_1 \cdot a_5 = 28$

30. Tõestage, et kolmnurga, kumera nelinurga, kumera viisnurga jne., kumera n-nurga sisenurkade summad moodustavad aritmeetilise jada. Kui suur on kumera 21-nurga sisenurkade summa?

31. Paigutage arvude 7 ja 35 vahele 6 arvu nii, et need koos antud arvudega oleksid aritmeetilise jada järjestikused liikmed.

32. Paigutage arvude 5 ja 1 vahele 7 arvu nii, et need koos antud arvudega oleksid aritmeetilise jada järjestikused liikmed.

33. 1. Moodustage 3 aritmeetilist jada (nende hulgas olgu ka negatiivsete liikmetega jada). Kirjutage välja iga jada esimesed 6 liiget.
2. Uurige, kuidas on jada iga liige seotud oma kahe naaberliikmega?
3. Tõestage leitud seos.
4. Millest võiks olla aritmeetiline jada saanud oma nimetuse?

34. Tõestage, et aritmeetilises jadas $a_n + a_m = a_p + a_r$, kui $n + m = p + r$.

35. Aritmeetilises jadas (a_n) on $a_1 = 8{,}7$, $d = -0{,}3$. Milliste liikmete korral jadast on täidetud tingimus $a_n \geq 0$?

36. Näidake, et $x^2 + xy + y^2$, $z^2 + xz + x^2$, $y^2 + yz + z^2$ on aritmeetilise jada 3 järjestikust liiget, kui x, y ja z on mingi aritmeetilise jada 3 järjestikust liiget.

37. Arvud x^2, y^2 ja z^2 on aritmeetilise jada järjestikused liikmed, kusjuures jada vahe ei ole 0. Näidake, et siis ka arvud $(y+z)^{-1}$, $(x+z)^{-1}$ ja $(x+y)^{-1}$ on mingi aritmeetilise jada järjestikused liikmed.

1.3.2. ARITMEETILISE JADA ESIMESE *n* LIIKME SUMMA

Kui saksa matemaatik Carl Friedrich Gauss (1777–1855) oli 9-aastane, andis tema õpetaja ülesande leida kõigi naturaalarvude summa 1-st kuni 100-ni. Ta lootis, et õpilastel jätkub arvutamist terveks tunniks või kauemakski. Vaevalt oli õpetaja ülesande andnud, kui C. F. Gauss oma tahvli ülesande vastusega õpetajale ulatas. *Kuidas jõudis ta nii kiiresti vastuseni?*

Noore Gaussi poolt avastatud seaduspärasus on paremini märgatav, kui arvud 1–100 kirjutada kolmnurgana. Näeme, et $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \ldots = 101$. Et selliseid summasid on kokku 50, on ülesande vastuseks $50 \cdot 101 = 5050$.

50 51
… …
3 98
2 99
1 100

Kontrollige, kas leitud seos peab paika ka teiste aritmeetiliste jadade korral.

Teoreem. **Kui võtta aritmeetilises jadas *n* järjestikust liiget, siis on seal algusest ja lõpust võrdsel kaugusel seisvate liikmete summa jääv ning võrdub esimese ja viimase liikme summaga.**

Tõestus.

Olgu antud aritmeetilise jada (a_n) n järjestikust liiget

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$.

Sel juhul algusest ja lõpust esimesel kohal olevate liikmete summa on $a_1 + a_n$. Algusest ja lõpust teisel kohal olevate liikmete summa on

$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$.

Vaatleme algusest ja lõpust k-ndate liikmete summat. Teame, et lõpust 2. liikme indeks on $n-1$, lõpust 3. liikme indeks $n-2$ jne., lõpust k-nda liikme indeks on $n-(k-1) = n-k+1$. Jada üldliikme valemi järgi

$a_k = a_1 + (k-1)d$, $a_{n-k+1} = a_1 + [(n-k+1)-1]d = a_1 + (n-k)d$ ja seega

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k)d =$$
$$= a_1 + kd - d + a_1 + nd - kd =$$
$$= a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n.$$

Saadud omadust kasutades tuletame valemi **aritmeetilise jada esimese *n* liikme summa S_n** arvutamiseks. Esitame summa S_n kaks korda: üks kord on summas jada liikmed nende loomulikus järjestuses, teine kord vastupidises järjestuses.

(1) $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

(2) $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$

Nagu äsja tõestasime, on võrduste paremal pool kohakuti asuvate liikmete summad võrdsed. Et selliseid summasid on n tükki, saame võrduste (1) ja (2) liitmisel $2S_n = (a_1 + a_n)n$, kust saame valemi aritmeetilise jada esimese n liikme summa arvutamiseks:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Teades, et $a_n = a_1 + (n-1)d$, võime saadud valemile anda ka teise kuju:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n \text{ ehk } \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Viimane valem võimaldab arvutada esimese n liikme summat vaid jada esimese liikme ja jada vahe järgi. Kui $d = 0$, siis $S_n = a_1 n$.

Näide 1.

Leiame summa $1 + 2 + 3 + \ldots + n$. Siin on liidetavateks aritmeetilise jada n järjestikust liiget ning $a_1 = 1$, $d = 1$, $a_n = n$.

$$S_n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Näide 2.

Leiame kõigi 100-st väiksemate paaritute naturaalarvude summa. Esimene paaritu naturaalarv $a_1 = 1$ ja $a_n = 99$. Tarvis on teada veel liikmete arvu n. Selle leiame jada üldliikme valemist $a_n = a_1 + (n-1)d$:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{98}{2} + 1 = 50 \text{ ja } S_{50} = \frac{1+99}{2} \cdot 50 = 100 \cdot 25 = 2500.$$

A

38. Leidke aritmeetilise jada esimese 10 liikme summa.

1) $a_1 = -17$, $d = 6$;
2) $a_1 = 3$, $d = -5$;
3) $a_1 = 2$, $a_3 = 6$;
4) $a_1 = \frac{3}{4}$, $d = 4$.

39. Leidke aritmeetilise jada esimese n liikme summa.

1) $a_1 = 10$, $a_n = -19$, $n = 30$;
2) $a_1 = 3{,}4$, $d = 2{,}1$, $n = 14$;
3) $a_1 = \frac{5}{6}$, $d = \frac{4}{3}$, $n = 12$;
4) $d = -\frac{1}{4}$, $n = 13$, $a_n = 1$;
5) $a_1 = -10$, $n = 6$; $a_n = -20$;
6) $d = 2$, $n = 15$, $a_n = -10$.

40. Mitu lööki lööb ööpäevas Tartu Raekoja kell, kui see lööb täistunde 1-st 12-ni, peale selle veel igal veerandtunnil ühe löögi, igal pooltunnil kaks lööki, igal kolmveerandtunnil kolm lööki ja igal täistunnil neli lööki?

41. Mitu 7-ga jaguvat arvu on arvude 100 ja 1000 vahel? Leidke nende arvude summa.

42. Tõestage, et

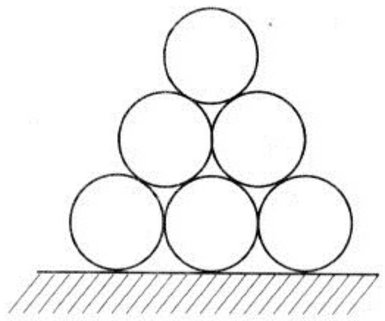
1) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$;
2) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$;
3) $2 + 6 + 10 + \ldots + (4n - 2) = 2n^2$.

43. Vabalt langev keha läbib esimese sekundiga 4,9 m ja iga järgneva sekundiga 9,8 m rohkem kui eelmise sekundiga. Mitmendal sekundil langeb keha 249,9 m? Mitu sekundit langeb keha 500 m kõrguselt? Kui sügav on šaht, kui keha kukub selle põhja 5 sekundiga?

44. Firma A lubab maksta töölisele esimesel aastal palka 84 000 krooni ning tõsta igal järgneval aastal palka 5000 krooni. Firma B lubab maksta esimesel aastal 90 000 krooni ning tõsta palka 4000 krooni igal järgneval aastal. Kui palju teeniks tööline 10 aastaga kummaski firmas töötades?

45. Omanik sai 11 aastat tagasi oma aktsiatelt 7000 krooni tulu aastas. Viimasel aastal oli see tulu 14 000 krooni, kusjuures tulu aktsiatelt suurenes igal aastal sama summa võrra. Kui suur oli tulu iga-aastane juurdekasv? Kui palju tulu sai omanik aktsiatelt 11 aastaga?

46. Veetrassi torud tuleb ehitusplatsil laduda kolmnurksesse virna (joon. 1.4). Mitmerealine virn tekib 120 toru paigutamisel? Mitu toru tuleb panna kõige alumisse ritta? Kui kõrge saab see virn, kui toru välimine läbimõõt on 20 cm?



Joon. 1.4

47. Aritmeetilise jada esimene liige on 20 ja neljas liige on 71. Mitu liiget tuleb selles jadas võtta, et nende summa oleks 2652?

48. Jalgratturite matkagrupp otsustas pärast ühtlast kahetunnilist sõitu, kui oli läbitud 24 km, tõsta igas järgnevas tunnis keskmist kiirust 2 km võrra. Mis kellaajal jõudis matkagrupp sihtkohta, kui väljuti kell 7 hommikul ja kogu tee pikkus oli 114 km?

B

49. Leidke kõigi selliste kolmekohaliste naturaalarvude summa, mis 5-ga jagamisel annavad jäägi 1.

50. Tõestage aritmeetilise jada esimese n liikme summa valem matemaatilise induktsiooni abil.

51. Aritmeetilise jada kolme esimese liikme summa on 66, teise ja kolmanda liikme korrutis on 528. Leidke selle jada esimese 40 liikme summa.

52. Aritmeetilises jadas $a_p = q$, $a_q = p$. Avaldage a_n ja S_n suuruste n, p ja q kaudu.

53. Aritmeetilises jadas võetakse teatud arv järjestikuseid liikmeid, kus esimese nelja liikme summa on 56 ja viimase nelja liikme summa on 112. Leidke liikmete arv, kui jada esimene liige on 11.

54. Isa kingib igale oma viiest pojast alates 5. sünnipäevast nii mitu raamatut, kui mitme aastaseks poeg saab. Poegade vanused moodustavad aritmeetilise jada vahega 3. Kui vana on iga poeg, kui isa on neile kokku kinkinud 325 raamatut?

1.4. GEOMEETRILINE JADA

55. On antud järgmised jadad:

1) 1, 2, 4, 8, 16, ...;
2) 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ...;
3) $-3, -3^2, -3^3, -3^4, -3^5, \ldots$;
4) $-3, 6, -12, 24, -48, \ldots$.

1. Leidke seaduspärasus ja jätkake antud jadasid.
2. Mida ühist märkate nendes jadades?
3. Leidke jada üldliige.

Jada, milles iga liikme ja sellele eelneva liikme jagatis on konstantne, nimetatakse geomeetriliseks jadaks[1].

[1] Geomeetrilist jada nimetatakse ka geomeetriliseks progressiooniks.

Kui jada (a_n) on geomeetriline jada, siis on jagatis $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ ühesugune iga $n > 1$ korral. Seda jagatist nimetatakse **geomeetrilise jada teguriks** ja tähistatakse tähega q. Seega $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ ehk $a_n = a_{n-1}q$.

Kui näiteks geomeetrilises jadas $a_1 = 6$ ja $q = 2$, saame jada 6, 12, 24, 48, … . Kui $a_1 = 3$ ja $q = 1$, saame konstantse jada 3, 3, 3, … .

56. Millised järgmistest jadadest on geomeetrilised, millised aritmeetilised?

1) 1, 3, 9, 27, …;
2) 1, 2, 3, 4, …;
3) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{3}, -1\frac{1}{6}$, …;
4) $\frac{1}{3}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{-1}{24}$, …;
5) $\sqrt{7}, 7, 7\sqrt{7}, 49$, …;
6) 0,2; 0,6; 1,8; 5,4; …;
7) –16, –8, –4, –2, …;
8) –24, –16, –8, 0, …;
9) –8, –8, –8, –8, …;
10) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, … .

57. 1. Leidke ülesandes 56 esitatud geomeetriliste jadade tegurid.

2. Joonestage iga jada jaoks arvtelg ning kandke sellele jada esimesed 6 liiget.
3. Uurige jada sõltuvalt teguri q märgist (vaadelge eraldi jadasid, kus $q > 0$ ja $q < 0$). Millise järelduse teete? Kontrollige oma väidet veel mõne jada korral.
4. Missuguste q väärtuste korral on geomeetriline jada tõkestamata? Tooge veel näiteid sellistest geomeetrilistest jadadest.
5. Missuguste q väärtuste korral on geomeetriline jada tõkestatud? Tooge veel näiteid sellistest geomeetrilistest jadadest.
6. Missuguseid väärtusi ei tohi geomeetrilise jada tegur omada?
7. Missuguseid väärtusi ei tohi geomeetrilise jada liikmed omada?

1.4.1. GEOMEETRILISE JADA ÜLDLIIGE

Kui on teada geomeetrilise jada (a_n) esimene liige a_1 ja jada tegur q, on võimalik leida selle jada mistahes liiget:

$a_2 = qa_1$, $a_3 = qa_2 = q^2a_1$, $a_4 = qa_3 = q^3a_1$

ehk üldiselt $a_n = q^{n-1}a_1$.

Teoreem. **Geomeetrilise jada (a_n) üldliige avaldub kujul $a_n = a_1q^{n-1}$.**

Tõestus.

Tõestame teoreemi matemaatilise induktsiooni meetodiga.

1. Kontrollime väite kehtivust $n = 1$ ja $n = 2$ korral: kui $n = 1$, siis $a_1 = a_1q^0 = a_1$, kui $n = 2$, siis $a_2 = a_1q^{2-1} = a_1q$.

Näeme, et mõlemal juhul väide kehtib.

2. Oletame, et väide kehtib mingi naturaalarvu $n = k$ korral, s.t. et $a_k = a_1q^{k-1}$. Näitame, et siis kehtib väide ka $n = k + 1$ korral. Peame näitama, et $a_{k+1} = a_1q^{(k+1)-1} = a_1q^k$. Tõepoolest, geomeetrilise jada definitsiooni kohaselt $a_{k+1} = a_kq = a_1q^{k-1}q = a_1q^{k-1+1} = a_1q^k$. Seega kehtib väide iga naturaalarvu $n \geq 1$ korral.

Näide 1.

Geomeetrilises jadas on antud $a_5 = 16$ ja $a_1 = 81$. Leiame jada teguri q.

Et $a_n = a_1q^{n-1}$, siis $a_5 = a_1q^4$. Seega $16 = 81q^4$, millest $q^4 = \frac{16}{81}$ ning $q = \pm\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \pm\frac{2}{3}$. Tähendab, leidub kaks sellist geomeetrilist jada:

1) $81, -54, 36, -24, 16, \ldots, 81\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \ldots$;

2) $81, 54, 36, 24, 16, \ldots, 81\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \ldots$.

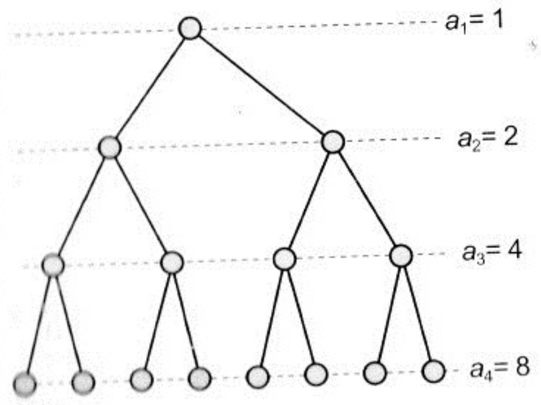
Näide 2.

Üks koolerapisik jaotub iga poole tunni järel kaheks pisikuks. Kui palju koolerapisikuid on tekkinud ühest koolerapisikust 5 tunni möödudes?

Kui algul on üks koolerapisik, siis poole tunni pärast on kaks pisikut, sealt edasi poole tunni pärast 4 pisikut jne. (joon. 1.5). Tekib geomeetriline jada, kus $a_1 = 1$, $q = 2$. Et a_1 on pisikute arv vaatluse algul, siis tuleb meil leida a_{11}:

$a_{11} = a_1q^{10} = 1 \cdot 2^{10} = 1024$.

Vastus. Viie tunni pärast on 1024 pisikut.



Joon. 1.5.

A

58. Leidke geomeetrilise jada üldliige ja kuues liige.

1) $a_1 = 1, q = 2$;
2) $a_1 = 2, q = -3$;
3) $a_1 = 0{,}125, q = -4$;
4) $a_1 = -10, q = 0{,}5$;
5) $a_1 = -\frac{5}{6}, q = -\frac{3}{5}$;
6) $a_1 = 51, q = 10^{-1}$;
7) $a_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}, q = \sqrt{6}$;
8) $a_1 = -256, q = \frac{1}{4}$.

59. Leidke geomeetrilise jada esimene liige.

1) $q = 5, a_3 = 125$;
2) $q = -0{,}2, a_5 = 12$;
3) $q = -1, a_{20} = 7$;
4) $q = 2, a_8 = 720$;
5) $q = \sqrt{3}, a_5 = 24$;
6) $q = -\sqrt{5}, a_6 = 75\sqrt{5}$.

60. Leidke geomeetrilise jada üheksas liige.

1) $a_2 = 6, a_4 = 24$;
2) $a_3 = -9, a_5 = -81$;
3) $a_5 = 2, a_{10} = \frac{1}{16}$;
4) $a_5 = \frac{1}{40}, a_8 = \frac{1}{40\,000}$.

61. Paigutage arvude 8 ja 216 vahele 2 arvu nii, et need koos antud arvudega oleksid geomeetrilise jada 4 järjestikust liiget.

62. Paigutage arvude 6 ja 30,375 vahele 3 arvu nii, et need koos antud arvudega oleksid geomeetrilise jada järjestikusteks liikmeteks.

63. Õhurõhk väheneb Maast kaugenedes ligikaudu 10 korda iga 16 km kohta. Leidke õhurõhk Maast 64 km kaugusel, kui Maal on õhurõhk 760 mm Hg.

64. Kolmnurga K_1 külgede keskpunktide ühendamisel tekib kolmnurk K_2, selle külgede keskpunktide ühendamisel kolmnurk K_3 jne. Leidke kolmnurga K_5 ümbermõõt, kui esialgse kolmnurga ümbermõõt on 64 cm.

65. Kell 12^{00}–12^{10} mõtlesid 3 inimest välja kuulujutu ja asusid siis seda levitama. Mitu inimest saab "uudisest" teada kell 14^{50}–15^{00}, kui "uudise" teadjate arv kahekordistub iga 10 minuti jooksul?

66. Segametsa juurdekasv aastas moodustab 3% aasta algul seal olemas olevast puidust. Mitu tihumeetrit puitu on 10 aasta pärast metsas, kus praegu on 200 tm puitu?

67. Kui suureks kasvab 1000-kroonine hoius 10 aastaga pangas, mis maksab 4% intressi aastas?

68. 1990. aasta algul oli Indias 920 miljonit elanikku. Kui suur oli India rahvaarv 2000. a. algul, kui rahvastiku iga-aastane juurdekasv on 3%?

69. On antud järgmised geomeetrilised jadad:

1) $a_1 = 1, q = 2$;
2) $a_1 = 8, q = \frac{1}{2}$;
3) $a_1 = \frac{1}{4}, q = 4$.

1. Kirjutage välja iga jada 6 esimest liiget.
2. Uurige, kuidas avaldub geomeetrilise jada iga liige (alates teisest) oma kahe naaberliikme kaudu.
3. Tõestage leitud seos.
4. Millest võiks olla geomeetriline jada saanud oma nimetuse?
5. Kas leitud seos kehtib igas geomeetrilises jadas?

B

70. Leidke geomeetrilise jada kolm järjestikust liiget, kui nende summa on 21 ning nende pöördarvude summa on $\frac{7}{12}$.

71. Leidke geomeetriline jada, milles esimese kolme liikme summa on 112 ja järgmise kolme liikme summa on 14.

72. Arvud, mis väljendavad risttahuka mõõtmeid, on geomeetrilise jada järjestikused liikmed. Leidke risttahuka mõõtmed, kui risttahuka vähima tahu pindala on 108 m^2 ja täispindala 888 m^2.

73. Leidke 4 arvu, millest kolm esimest on geomeetrilise jada järjestikused liikmed teguriga 3 ja kolm viimast on aritmeetilise jada järjestikused liikmed vahega 24.

74. Neli arvu on geomeetrilise jada järjestikused liikmed. Kui kolmandast arvust lahutada 2 ja neljandast 8, siis on saadud 4 arvu aritmeetilise jada järjestikused liikmed. Leidke need arvud.

75. Kolm arvu, mille summa on 26, on geomeetrilise jada järjestikused liikmed. Kui nendele arvudele liita vastavalt 1, 14 ja 19, saame 3 arvu, mis moodustavad aritmeetilise jada. Leidke need arvud.

1.4.2. GEOMEETRILISE JADA ESIMESE *n* LIIKME SUMMA

Legend jutustab, et malemängust vaimustatud india kuningas Sheran tegi oma alamale, malemängu leiutajale, ettepaneku nimetada mingi soov, mille kuningas võiks täita. Leiutaja soov oli järgmine: üks nisutera malelaua 1. ruudu eest, 2 nisutera 2. ruudu eest, 4 nisutera 3. ruudu eest, 8 nisutera 4. ruudu eest, üldise iga järgmise ruudu eest kaks korda rohkem teri kui eelmise eest. Kuningas arvas, et see soov on liiga tagasihoidlik. On see nii?

Viljaterade arvud malelaual on geomeetrilise jada 1, 2, 4, 8, …, 2^{63}, … liikmed. Terade koguarv oleks selle jada esimese 64 liikme summa $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63}$.

Leiamegi järgnevas valemi geomeetrilise jada esimese n liikme summa arvutamiseks. Seda summat tähistatakse sümboliga S_n.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ ehk

$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-1}$. (1)

Korrutame viimast võrdust teguriga q:

$S_nq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + \ldots + a_1q^n$. (2)

Lahutades võrdusest (2) võrduse (1), saame

$S_nq - S_n = (a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n) - (a_1 + a_1q + \ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1})$.

Pärast koondamist võrduse paremal pool saame

$S_nq - S_n = a_1q^n - a_1$ ehk $S_n(q - 1) = a_1(q^n - 1)$.

Kui $q - 1 \neq 0$, saame viimasest võrdusest geomeetrilise jada esimese n liikme summa valemi

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Teisendades viimast valemit saame valemi jadа liikmete summa leidmiseks a_1 ja a_n kaudu:

$$S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{q-1} = \frac{a_1q^{n-1}q - a_1}{q-1} = \frac{qa_n - a_1}{q-1}$$ ehk $$S_n = \frac{qa_n - a_1}{q-1}.$$

Näide 1.

Leiame viljaterade arvu, mis tuleks kuningal malelaua leiutajale anda. Vaadeldavas jadas $a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 64$ ja

$$S_{64} = \frac{1(2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

See viljaterade kogus oleks üle triljoni tonni. *Võrrelge seda arvu kogu maailma aastase nisutoodanguga.*

Näide 2.

Leiame summa $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$, kus $x \neq 1$. Liidetavad on geomeetrilise jada liikmed, kus $a_1 = 1$, $q = x$. Seega

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Siit saame, et kehtib valem $x^n - 1 = (x - 1)(1 + x + \ldots + x^{n-1})$. *Kuidas näeb see valem välja $n = 2$ ja $n = 3$ korral?*

A

76. Kuidas avaldub geomeetrilise jada esimese n liikme summa, kui $q = 1$?

77. Leidke geomeetrilise jada esimese n liikme summa.

1) $a_1 = 3$, $q = 2$, $n = 5$;
2) $a_1 = 4$, $q = 0{,}5$, $n = 6$;
3) $a_1 = 0{,}5$, $q = 3$, $n = 4$;
4) $a_1 = 5$, $q = \frac{-1}{2}$, $n = 10$.

78. Leidke geomeetrilise jada esimese kuue liikme summa.

1) 3, –6, 12, …;
2) 58; 87; 130,5; …;
3) 3, 6, 12, …;
4) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, … .

79. Mitu liiget tuleb võtta geomeetrilises jadas 4, 20, 100, …, et nende summa oleks 15 624?

80. Geomeetrilises jadas $a_1 = 0{,}1$ ja $q = 3$. Mitu liiget tuleb selles jadas võtta, et nende summa oleks 4?

81. Leidke summa.

1) $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^8$;
2) $2^9 + 2^8 + \ldots + 2 + 1$;
3) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^7}$;
4) $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \ldots + 2^{12}$;
5) $1 + x + x^2 + \ldots + x^{100}$;
6) $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{15}$.

82. Kummipall langeb mingilt kõrguselt ja põrkab põrandalt tagasi kõrgusele, mis on üks kolmandik langemiskõrgusest. Kui pika tee on läbinud 3 meetri kõrguselt kukkunud pall, kui ta puudutab 8. korda põrandat?

83. Leidke ül. 65 andmetel, mitu inimest teadsid "uudist" kell 15^{00}.

84. Neiu A mõtles välja järgmise postkaardimängu: uusaasta esimesel esmaspäeval saadab ta postkaardi oma kahele sõbrale palvega, et need kumbki saadaksid järgmise nädala esmaspäeval postkaardid oma kahele sõbrale jne. Mitu postkaarti saadetaks teele aasta viimasel esmaspäeval? Mitu postkaarti osaleks selles mängus kogu aasta jooksul?

85. Linna elanike arv kasvab iga aastaga 20% võrra. Kui suur on linna elanike arvu aastane kasvutegur? Leidke linna elanike arv 5 aasta pärast, kui see on praegu 100 000.

B

86. Geomeetrilise jada kolme järjestikuse liikme summa on 52. Kui keskmisele arvule liita 8, on need 3 arvu aritmeetilise jada järjestikusteks liikmeteks. Leidke need arvud.

liikmed. Kui nendele arvudele liita vastavalt 2, 3 ja 9, siis on saadud arvud geomeetrilise jada järjestikused liikmed. Leidke need arvud.

88. Leidke kolmekohaline arv, mille numbrid on geomeetrilise jada järjestikusteks liikmeteks, kuid sellest arvust 400 võrra väiksema arvu numbrid on aritmeetilise jada järjestikusteks liikmeteks.

89. Kolme arvu summa on 93 ja nad on geomeetrilise jada järjestikusteks liikmeteks. Ühtlasi on need arvud aritmeetilise jada esimeseks, teiseks ja seitsmendaks liikmeks. Leidke need arvud.

1.4.3. HÄÄBUVA GEOMEETRILISE JADA SUMMA

90. On antud järgmised jadad:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$;

2) $10, 9, 8, 7, \ldots$;

3) $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \ldots$;

4) $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \ldots$.

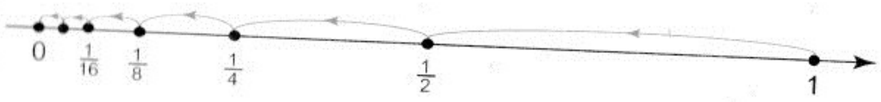
1. Leidke jada üldliige.
2. Missugused antud jadadest on geomeetrilised?
3. Missugused antud jadadest on hääbuvad?
4. Missugused antud jadadest on hääbuvad ja geomeetrilised? Leidke nende jadade tegur.
5. Tooge veel näiteid hääbuvatest geomeetrilistest jadadest.

Geomeetriline jada on hääbuv, kui $|q| < 1$.

Näide 1.

Vaatleme hääbuvat geomeetrilist jada

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots.$$



Joon. 1.6

Kujutame selle jada esimesed liikmed arvteljel (joon. 1.6). Mida kaugemale me jadas läheme, seda enam lähenevad jada liikmed nullile. Näiteks

$$a_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 0{,}00195, \quad a_{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = 0{,}0000305, \quad a_{21} = \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 0{,}000000954.$$

Leidke arvutil a_{31}, a_{41}, a_{100} ja veenduge, et kui $n \to \infty$, siis $a_n \to 0$.

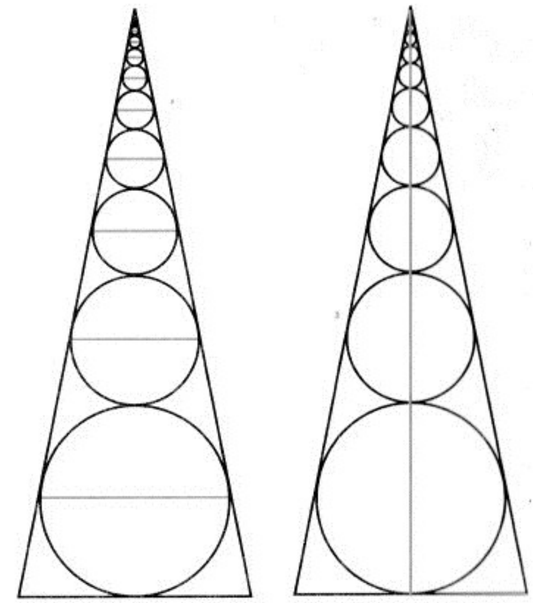
Need nullilähedased liikmed ei muuda oluliselt jada n liikme summat, kui n on küllalt suur ja S_n läheneb seega arvule 2 (vt. järgnev tabel).

S_3	S_{10}	S_{16}	S_{21}	S_{31}	S_{41}
1,75	1,9980469	1,9999695	1,999999	2	2

Seega lõpmatu summa

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$$

omandab lõpliku väärtuse. Öeldut illustreerib ka joonis 1.7. Võrdhaarsesse kolmnurka on joonestatud siseringjoon, olgu selle diameeter d_1. Tõmmates ringjoonele kolmnurga alusega paralleelse puutuja, tekib esialgse kolmnurgaga sarnane kolmnurk. Joonestame ka sellesse kolmnurka siseringjoone, mille diameeter olgu d_2. Sellist protsessi võib lõpmatult jätkata. Nii tekib meil ringjoonte jada, mille diameetrite pikkused moodustavad hääbuva geomeetrilise jada $d_1, d_2, d_3, \ldots$. Parempoolselt jooniselt on lihtne näha, et diameetrite pikkuste summa $d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_n \ldots$ on lõplik ja võrdub esialgse kolmnurga kõrgusega.



Joon. 1.7

Vaatleme, kuidas on võimalik arvutada mistahes hääbuva geomeetrilise jada liikmete summat $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$. Selleks teisendame geomeetrilise jada esimese n liikme summa valemit järgmiselt:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1 q^n}{q - 1} - \frac{a_1}{q - 1} = \frac{a_1 q^{n-1} q}{q - 1} - \frac{a_1}{q - 1} = \frac{a_n q}{q - 1} - \frac{a_1}{q - 1}.$$

Teame, et hääbuva jada korral $a_n \to 0$, kui $n \to \infty$. Seega ka liige $\frac{a_n q}{q - 1} \to 0$

ning summast jääb alles vaid teine liidetav $-\frac{a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$.

Arvu $\frac{a_1}{1-q}$ nimetatakse hääbuva geomeetrilise jada summaks ning tähistatakse tähega S. Seega $S = \frac{a_1}{1-q}$.

Seega S on arv, millele läheneb hääbuva geomeetrilise jada n liikme summa S_n, kui jada liikmete arv n tõkestamatult kasvab.

Näide 2.

Leiame hääbuva geomeetrilise jada $5, 3, \frac{9}{5}, \ldots, 5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}, \ldots$ esimese 7 liikme summa ja jada summa. Selles jadas $a_1 = 5$, $q = 0{,}6$.

$$S_7 = \frac{5(0{,}6^7 - 1)}{0{,}6 - 1} \approx 12{,}15 \text{ ja } S = \frac{5}{1-0{,}6} = 12{,}5.$$

Näide 3.

Teisendame lõpmatu perioodilise kümnendmurru $0{,}(13)$ harilikuks murruks. Teame, et $0{,}(13) = 0{,}131313\ldots = 0{,}13 + 0{,}0013 + \ldots + 0{,}000013 + \ldots$. Paremal olevad liidetavad on hääbuva geomeetrilise jada järjestikused liikmed, kusjuures $q = 0{,}01 < 1$ ja $a_1 = 0{,}13$. Seega $S = \frac{0{,}13}{1-0{,}01} = \frac{0{,}13}{0{,}99} = \frac{13}{99}$.

Vastus. $0{,}(13) = \frac{13}{99}$.

A

91. Kontrollige, kas jada on hääbuv geomeetriline jada. Leidke jada summa.

1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$;
2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \ldots$;
3) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$;
4) $2, \frac{1}{5}, \frac{1}{50}, \frac{1}{500}, \ldots$;
5) $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$;
6) $2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 1, \ldots$;
7) $49, -14, 4, -\frac{8}{7}, \ldots$;
8) $-2, \frac{14}{9}, -\frac{98}{81}, \frac{686}{729}, \ldots$;
9) $-\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{5\sqrt{5}}, \ldots$;
10) $\sqrt{7}, -\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{7\sqrt{7}}, -\frac{1}{49\sqrt{7}}, \ldots$.

92. Esitage lõpmatu perioodiline kümnendmurd hariliku murruna.

1) $0{,}(6)$;
2) $0{,}(36)$;
3) $0{,}(85)$;
4) $5{,}2(3)$;
5) $1{,}3(45)$;
6) $2{,}(564)$.

93. Leidke summa.

1) $\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \ldots$;
2) $2 - 1 + 0{,}5 - \ldots$;
3) $1 + \sin\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{6} + \ldots$;
4) $1 + \tan 30° + \tan^2 30° + \ldots$.

94. Hääbuva geomeetrilise jada summa on 18 ja jada esimene liige on 3. Leidke jada tegur.

95. Hääbuva geomeetrilise jada teine liige on 18 ja jada summa on 81. Leidke jada kolmas liige.

96. Pöörlev hooratas teeb seiskamisel 300 pööret minutis. Igas järgnevas minutis teeb ta kaks kolmandikku sellest pöörete arvust, mis ta tegi eelmises minutis. Mitu pööret teeb hooratas, kuni ta seisma jääb?

97. Ruudu sisse joonestatakse ruut, mille tippudeks on esialgse ruudu külgede keskpunktid. Saadud ruudu sisse joonestatakse samal viisil uus ruut jne. Leidke selliste ruutude pindalade summa, kui esialgse ruudu külg on 4 cm.

98. Leidke ül. 82 andmete põhjal, kui pika tee läbib kummipall seismajäämiseni.

99. Hääbuva geomeetrilise jada summa on 10 ja kolme esimese liikme summa on 8,75. Leidke jada esimene liige ja tegur.

B

100. Leidke hääbuva geomeetrilise jada tegur, kui selle jada summa on 3 korda suurem jada esimese kolme liikme summast.

101. 45°-se nurga haaral võetakse punkt X_1, mille kaugus nurga tipust on 1 cm. Punktist X_1 tõmmatakse ristlõik X_1X_2 nurga teisele haarale, selle ristlõigu otspunktist X_2 omakorda ristlõik X_2X_3 nurga teisele haarale jne. Leidke lõikude $X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4, \ldots$ pikkuste summa.

102. Ruudu diagonaal on 5 cm. Selle ruudu külg võetakse uue ruudu diagonaaliks, saadud ruudu külg omakorda järgmise ruudu diagonaaliks jne. Leidke nii tekkinud ruutude pindalade summa.

103. Ringi raadiusega 1 kujundatakse ruut, sellesse uuesti ring, ringi jälle ruut jne. Leidke kõigi

1) ringjoonte pikkuste summa;
2) ringide pindalade summa;
3) ruutude pindalade summa.

104. Näidake, et võrdhaarsesse kolmnurka (vt. joon. 1.7) kujundatud ringide diameetrite pikkused moodustavad hääbuva geomeetrilise jada.

1.5. JADA PIIRVÄÄRTUS

1.5.1. JADA PIIRVÄÄRTUSE MÕISTE

Eelmistes artiklites uurisime joonistele tuginedes jadade käitumist, kui $n \to \infty$. Matemaatikas on selline nn. piirprotsesside vaatlemine andnud lahendused paljudele ülesannetele. Mingi tundmatu suuruse määramiseks leitakse esialgu selle suuruse ligikaudseid väärtusi, mida täpsustatakse nii, et need erinevad otsitavast suurusest ikka vähem ja vähem. Sellist meetodit kasutatakse näiteks kõverjoonte pikkuse arvutamiseks, kõverjoontega piiratud kujundi pindala arvutamiseks, kehade ruumala arvutamiseks, kõverjoontele puutuja leidmiseks jne. Piirprotsessi kasutamine viis 17. sajandil uue matemaatika haru – matemaatilise analüüsi tekkele. See on matemaatika haru, mis uurib funktsioone piirprotsesside abil.

Järgnevas tutvumegi piirprotsessidega lähemalt. Vaatleme jada (a_n):

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{99}{100}, \frac{100}{101}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots .$$

Kujutage jada esimesed 6 liiget arvteljel.

Mida kaugemale me jadas läheme, seda enam lähenevad jada liikmed arvule 1 ehk seda vähem erinevad jada liikmed arvust 1 (vt. järgnev tabel). Eelnevas kirjutasime selle lühemalt üles järgmiselt: kui $n \to \infty$, siis $a_n \to 1$.

n	1	2	3	9	99	999	9999
a_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{99}{100}$	$\frac{999}{1000}$	$\frac{9999}{10000}$
$\lvert a_n - 1\rvert$	0,5	0,(3)	0,25	0,1	0,01	0,001	0,0001

Alates 100-ndast liikmest erinevad jada liikmed arvust 1 vähem kui 0,01; alates 1000-ndast liikmest on see erinevus väiksem kui 0,001 jne. Öeldakse, et selle jada piirväärtus on 1.

Arvu A nimetatakse jada (a_n) piirväärtuseks, kui iga positiivse arvu ε[1] jaoks leidub jadas järjekorranumber m, millest alates jada järgnevad liikmed erinevad arvust A vähem kui ε võrra, s.t. $|a_n - A| < \varepsilon$, kui $n \geq m$.

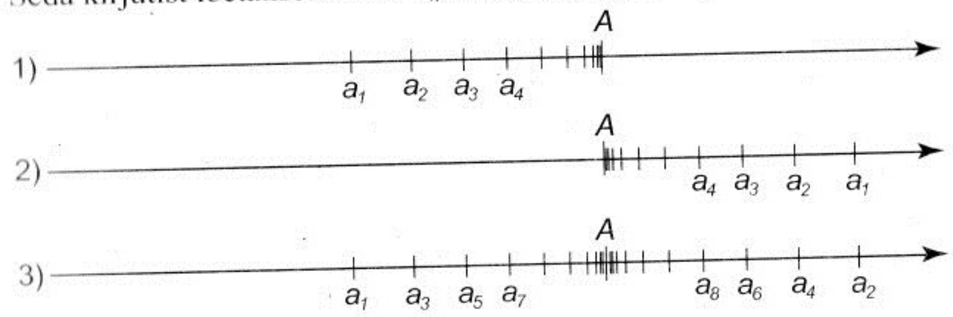
[1] ε – kreeka täht epsilon.

Jada liikmete ja arvu A vahede puhul tuleb seepärast vaadelda nende absoluutväärtusi, et jada liikmete lähenemine arvule A võib toimuda kas vasakult (joon. 1.8a), paremalt (joon. 1.8b) või pendeldades (joon. 1.8c).

Seda, et arv A on jada (a_n) piirväärtuseks, tähistatakse[1]:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Seda kirjutist loetakse: *liimes a_n-st n lähenemisel lõpmatusele on A.*



Joon. 1.8

Nii võime kirjutada, et $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ jne.

Näide 1.

Näitame, et $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$. Moodustame vahe absoluutväärtuse ja uurime seda.

$$\left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| = \left|\frac{2n+1-2n}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Vaatame, kas leidub iga positiivse arvu ε jaoks selline jada liikme järjekorranumber n, et $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Seda võrratust teisendades saame, et $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Viimane võrratus ütleb, et kui valime jadas liikme, mille järjekorranumber on suurem kui $\frac{1}{\varepsilon}$, siis jada järgnevad liikmed erinevad arvust 2 vähem kui ε võrra. Näiteks kui $\varepsilon = 0{,}1$, siis vastav $n > 10$, kui $\varepsilon = 0{,}01$, siis $n > 100$ jne. ehk pärast 10-ndat liiget erinevad jada järgnevad liikmed arvust 2 vähem kui 0,1 võrra, pärast 100-ndat liiget vähem kui 0,01 võrra jne.

Näide 2.

Leiame jada 1, 3, 5, …, $2n - 1$, … piirväärtuse.

Teame, et selle jada liikmed suurenevad tõkestamatult, kui selles jadas järjest kaugemale minna. Näiteks $a_{100} = 199$, $a_{1000} = 1999$ jne. Jada piirväärtuse definitsiooni kohaselt sellel jadal piirväärtust ei leidu. Antud juhul öeldakse, et

[1] *limes* – ladina keeles *piir*. Sõna *limes* kasutas piirväärtuse tähenduses esimesena Isaac Newton (1643–1727).

jadal on **lõpmatu piirväärtus**. Jada piirväärtus on *pluss lõpmatus*, kui $n \to \infty$ korral $a_n \to \infty$.

Vastus. $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)=\infty$ või $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)=+\infty$.

Näide 3.

Leiame jada 2, $\frac{1}{3}$, $-\frac{4}{4}$, $-\frac{11}{5}$, …, $\frac{5-n^2}{n+1}$, … piirväärtuse.

Selle jada liikmed vähenevad tõkestamatult, kui jadas järjest kaugemale minna (joon. 1.9). Antud jada on tõkestamatult kahanev ja selle jada piirväärtus on *miinus lõpmatus*.

Joon. 1.9

Vastus. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5-n^2}{n+1}=-\infty$.

Üldiselt jada (a_n) piirväärtus on miinus lõpmatus, kui $n \to \infty$ korral $a_n \to -\infty$.

Kokku võttes

- hääbuva jada piirväärtus on 0, näiteks $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$;
- tõkestamatult kasvava jada piirväärtus on $+\infty$ ja tõkestamatult kahaneva jada piirväärtus on $-\infty$;
- nn. pendeldavatel tõkestamata jadadel piirväärtus puudub. Piirväärtus puudub ka mõnedel tõkestatud jadadel, näiteks jadal $-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$;
- kui jada piirväärtus on mingi arv A, siis öeldakse ka, et jadal on lõplik piirväärtus. Jadasid, millel on lõplik piirväärtus, nimetatakse **koonduvateks jadadeks**. Koonduv jada on alati tõkestatud;
- konstantse jada piirväärtus on see konstant ise. Näiteks $\lim\limits_{n\to\infty}1=1$, üldiselt $\lim\limits_{n\to\infty}c=c$.

A

105. Lihtsustage avaldist, kui n on nullist erinev naturaalarv.

1) $\left|\frac{1}{n}\right|$; 2) $\left|\frac{3}{2n-1}\right|$; 3) $\left|\frac{-3}{2n-1}\right|$; 4) $\left|\frac{n+1}{3n+8}\right|$;

5) $\left|\frac{5-n}{n+1}\right|$; 6) $\left|\frac{-n^3}{n^2+3}\right|$; 7) $\left|\frac{(-1)^n}{n+7}\right|$; 8) $\left|\frac{1-2n}{-n}\right|$.

106. Lahendage võrratus.

1) $|n-1|<2$; 2) $|3-5n|>1$; 3) $\left|\frac{n-1}{n}\right|>1$;

4) $\left|\frac{n+2}{n+3}\right|>1$; 5) $\left|\frac{2}{n+1}\right|<5$; 6) $\left|\frac{2n}{n+1}-2\right|<\frac{1}{100}$.

107. Mitmendast liikmest alates on hääbuva jada liikmed väiksemad kui $\frac{1}{1000}$?

1) $a_n=\frac{2}{n}$; 2) $a_n=\frac{2}{n+1}$; 3) $a_n=\frac{3}{n^2}$; 4) $a_n=\frac{1}{n^2+1}$.

108. Kontrollige, kas arv on jada piirväärtuseks.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n+5}=\frac{3}{2}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2}=1$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+4}{2n+11}=3$.

B

109. Millisest indeksist n alates on täidetud võrratus $|a_n-A|<10^{-4}$?

1) $a_n=\frac{n}{n+1}$, $A=1$; 2) $a_n=\frac{n+1}{5n}$, $A=\frac{1}{5}$;

3) $a_n=\frac{3n+2}{6n-1}$, $A=\frac{1}{2}$; 4) $a_n=\frac{2n-1}{n+1}$, $A=2$.

1.5.2. PIIRVÄÄRTUSE ARVUTAMINE

Et osata jada piirväärtust arvutada, on tarvis tunda piirväärtuse omadusi. Seni oleme kogenud, et kehtivad järgmised omadused.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-n)=-\infty$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}c=c$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Peale nende on jada piirväärtusel järgmised aritmeetiliste tehetega seotud omadused.

Kui on olemas lõplikud piirväärtused $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, siis

5) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A + B$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A - B$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n : b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n : \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A : B$, kui $B \neq 0$.

Tõestame nendest omaduse 5. Kõigepealt tuletame meelde, et võrratus $|x| < \varepsilon$ on samaväärne võrratusega $-\varepsilon < x < \varepsilon$, võrratus $|a - b| < \varepsilon$ samaväärne võrratusega $-\varepsilon < a - b < \varepsilon$. Vastavalt piirväärtuse definitsioonile leidub iga positiivse arvu ε jaoks jadas (a_n) järjekorranumber m_1 ja jadas (b_n) järjekorranumber m_2 nii[1], et

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ kui } n > m_1, \qquad -\frac{\varepsilon}{2} < a_n - A < \frac{\varepsilon}{2}$$

ehk

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ kui } n > m_2 \qquad -\frac{\varepsilon}{2} < b_n - B < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Liites need kaks samapidist võrratust, saame

$-\varepsilon < (a_n + b_n) - (A + B) < \varepsilon$ ehk $|(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon$.

Saadud võrratus kehtib iga n jaoks, mis on suurem kui m_1 ja m_2. Seetõttu järeldub viimasest võrratusest, et jada $(a_n + b_n)$ piirväärtus on $A + B$. ■

Näide 1.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$.

Näide 2.

Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n^2 - 5}$.

Kuna nimetaja piirväärtus on lõpmatus, siis ei saa me siin kasutada piirväärtuse leidmiseks valemit (8). Teisendame jada üldliikme avaldist, jagades murru lugejat ja nimetajat avaldisega n^2 ja saame:

[1] Neid järjekorranumbreid otsime siin mitte arvu ε, vaid arvu $\frac{\varepsilon}{2}$ järgi.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7}{n^2 - 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7}{n^2}}{\frac{n^2 - 5}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 7 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty} 5 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{7 \cdot 0 \cdot 0}{1 - 5 \cdot 0 \cdot 0} = 0.$$

Piirväärtust ei ole võimalik valemite 1–8 abil leida järgmistel nn. määramatuse juhtudel: $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ ja $\frac{0}{0}$ (siin tähistab ∞ jada, mille piirväärtus on lõpmatu, ning 0 tähistab jada, mille piirväärtus on 0). Selliste jadade piirväärtuse leidmiseks tuleb jada üldliikme avaldist eelnevalt teisendada nii, et määramatus kaoks ja oleks võimalik rakendada valemeid 1–8.

Näide 2.

Leiame $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n - 5}{2n + 3}$.

Selle piirväärtuse arvutamisel ei saa me kohe rakendada omadust 8, sest nii murru lugejal kui ka nimetajal lõplik piirväärtus puudub (määramatus $\frac{\infty}{\infty}$).

Toome lugejas ja nimetajas teguri n sulgude ette ning taandame:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n - 5}{2n + 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(6 - \frac{5}{n}\right)}{n\left(2 + \frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{6 - \frac{5}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(6 - \frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \frac{3}{n}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 6 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n}} = \frac{6 - 0}{2 + 0} = 3.$$

Näide 3.

Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Siin on tegemist määramatusega $\infty - \infty$. Teisendame avaldist järgmiselt:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{n + 1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

Seega otsitav piirväärtus on 0.

A

110. Põhjendage, et $\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot a_n = c\cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

111. Arvutage peast.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} 7n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} (-4n^2)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{7}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{6}{n}\right)$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n$.

112. Leidke jada piirväärtus.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^3}\right)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{15}{n^3+1}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}(7n^2+n)$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{3n+1}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5n}{2n}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}[-4(n+n^3)]$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2}$.

113. Leidke jada piirväärtus.

1) $a_n=\frac{n+1}{n-1}$; 2) $a_n=\frac{n+2}{n^2-4}$; 3) $a_n=\frac{3n+1}{n-6}$;

4) $a_n=\frac{n-3}{4-n}$; 5) $a_n=\frac{3n}{12n+11}$; 6) $a_n=\frac{7n+8}{2n}$;

7) $a_n=\frac{n^2+1}{2n^2-1}$; 8) $a_n=\frac{5n^2-3n}{3n+5n^2}$; 9) $a_n=\frac{n^3+n^2+1}{n^3+1}$;

10) $a_n=\frac{n^3}{n^3+n+2}$; 11) $a_n=\frac{n^3-5n+6}{2n^2+n-3}$; 12) $a_n=\frac{n^2-5}{n^3-2n^2+n-2}$.

114. Tuginedes jada piirväärtuse omadustele tõestage hääbuva geomeetrilise jada summa valem $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q}$.

B

115. Leidke jada piirväärtus.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{2+\sqrt{n}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-\sqrt{4n^2+n})$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}-1}{n-1}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+1})$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+1}-2n)$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+6n}-n)$.

116. Leidke piirväärtus.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$.

1.6. RINGJOONE PIKKUS JA RINGI PINDALA PIIRVÄÄRTUSENA

Järgnevas vaatleme kahte näidet sellest, kuidas piirprotsessi kasutades saab leida kõverjoone pikkuse ja kõveraga piiratud kujundi pindala. Olgu selleks kõverjooneks ringjoon.

Põhikoolist teame, et ringjoone pikkus C ja ringi pindala S arvutatakse järgmiselt:

$C=2\pi r$ ja $S=\pi r^2$.

Tõestame need valemid.

1. Ringjoone pikkus piirväärtusena

Ringjoone pikkust ei ole otseselt võimalik mõõta mingi pikkusühiku abil, sest pikkusühikud (1 cm, 1 m jne.) on kujutatavad sirglõikudena, kuid ringjoon on kõverjoon. Samas tunnetame me intuitiivselt, et ringjoonel on pikkus olemas. Näiteks kui ringikujuliselt asetatud nööri tõmbame mõlemast otsast pingutades sirgeks, siis saadud lõigu pikkus on ühtlasi ka ringjoone pikkuseks.

Ringjoone pikkuse arvutamise täpse valemi leidmiseks moodustame kumera hulknurga, mille ümbermõõt on ligikaudu võrdne ringjoone pikkusega. Selleks joonestame ringi sisse kõigepealt näiteks korrapärase nelinurga ehk ruudu (joon. 1.10). Kahekordistades hulknurga tippude arvu, saame korrapärase kaheksanurga, mille ümbermõõt erineb ringjoone ümbermõõdust juba vähem kui neli-nurga ümbermõõt. Kahekordistamise protsessi niiviisi jätkates saame hulknurgad, mille ümbermõõdud lähenevad üha enam ringjoone pikkusele. Seetõttu võime ringjoone pikkuse defineerida järgmiselt.

Ringjoone pikkuseks nimetatakse korrapäraste kõõlhulknurkade ümbermõõtude jada piirväärtust hulknurga tippude arvu tõkestamatul kasvamisel.

Oletame, et meil on ringi raadiusega r joonestatud korrapärane n-nurk (joon. 1.11), mille külg olgu pikkusega a_n. Ühendades hulknurga tipud ringi keskpunktiga O, jaotub kõõlhulknurk n võrdhaarseks kolmnurgaks. Iga selli kolmnurga tipunurk on $\frac{360^\circ}{n}$. Vaatleme ühte nendest kolmnurkadest, näiteks kolmnurka OAB. Tõmbame selle kolmnurga alusele AB kõrguse. Teame, et se

kõrgus poolitab kolmnurga aluse ja tipunurga. Täisnurksest kolmnurgast OBC võime kirjutada:

$$\frac{a_n}{2} : r = \sin\frac{360^\circ}{2n} \text{ ehk } \frac{a_n}{2r} = \sin\frac{360^\circ}{2n},$$

kust $a_n = 2r \cdot \sin\frac{360^\circ}{2n} = 2r \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}$.

Joon. 1.10

Et selliseid kolmnurki on n tükki, on kõõlhulknurga ümbermõõt

$$n \cdot a_n = 2rn \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Definitsiooni kohaselt avaldub ringjoone pikkus piirväärtusena järgmiselt:

$$C = \lim_{n\to\infty}(n \cdot a_n) = \lim_{n\to\infty}(2rn \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}) = 2r\lim_{n\to\infty}(n \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}).$$

Et ringjoone pikkus on lõplik arv, peab ka $\lim_{n\to\infty}(n \cdot \sin\frac{180^\circ}{n})$ olema lõplik arv.

Peale selle peab see arv olema kõigi ringjoonte puhul ühesugune, sest piirväärtuse märgi all ei esine ringjoone raadiust r.

Veenduge, et $\lim_{n\to\infty}(n \cdot \sin\frac{180^\circ}{n})$ *on meile tuntud irratsionaalarv* $\pi \approx 3{,}14$.

Selleks koostage ja täitke alljärgnev tabel.

n	$\frac{180^\circ}{n}$	$\sin\frac{180^\circ}{n}$	$n \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}$
3			
12			
24			
72			
192			
384			

Arvestades, et $\lim_{n\to\infty}(n \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}) = \pi$, saamegi ringjoone pikkuse valemi

$C = 2\pi r$.

2. Ringi pindala piirväärtusena

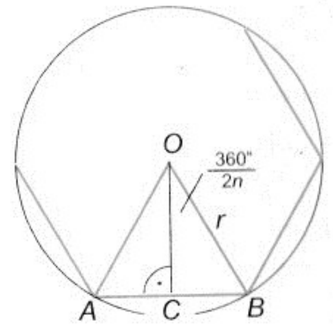
Ka ringi pindala ei ole otseselt võimalik mõõta meile tuntud pindalaühikutega (ühikruutudega pindalaga 1 cm^2, 1 m^2 jne.). Seetõttu toimime analoogiliselt

eelmises punktis tehtuga: kujundame ringi sisse korrapärase kõõlhulknurga ja lähendame selle pindala ringi pindalaga.

Ringi pindalaks nimetatakse ringi sisse kujundatud korrapäraste kõõlhulknurkade pindalade jada piirväärtust hulknurga tippude arvu tõkestamatul kasvamisel.

Ringi pindala valemi tuletamiseks kasutame taas joonist 1.11. Kolmnurga AOB pindala $S_k = \frac{a_n h_n}{2}$, kus h_n on kolmnurga AOB kõrgus OC. Kogu korrapärase hulknurga pindala on

$$S_n = n \cdot \frac{a_n h_n}{2} = \frac{n a_n h_n}{2}.$$



Joon. 1.11

Ringi pindala S avaldub seega järgmiselt:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot n \cdot \frac{h_n}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}(n \cdot a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{h_n}{2}.$$

Et $\lim_{n\to\infty}(n \cdot a_n) = 2\pi r$ ja $\lim_{n\to\infty} h_n = r$,

siis $S = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \pi r^2$ ehk

$S = \pi r^2$.

A

117. Leidke rõnga pindala, kui seda piiravate ringjoonte raadiused on a ja b ($a > b$).

118. Leidke ruudu sise- ja ümberringjoonte pikkused ning nende ringide pindalad, kui
   1) ruudu külg on 2 cm;
   2) ruudu diagonaal on 1,2 cm;
   3) ruudu diagonaal on 5 cm;
   4) ruudu ümbermõõt on 24 cm;
   5) ruudu pindala on 0,49 cm^2.

119. Leidke ringi raadiusega R kujundatud korrapärase kõõlkolmnurga pindala.

120. Leidke ringi ümber kujundatud korrapärase puutujakolmnurga pindala, kui ringi raadius on r.

121. Leidke korrapärase kuusnurga ümberringjoone ja siseringjoone pikkuste suhe, kui kuusnurga külg on
   1) 2 cm; 2) a cm.

122. Kahe korrapärase n-nurga ümbermõõdud suhtuvad nagu $a : b$. Kuidas suhtuvad nende n-nurkade pindalad?

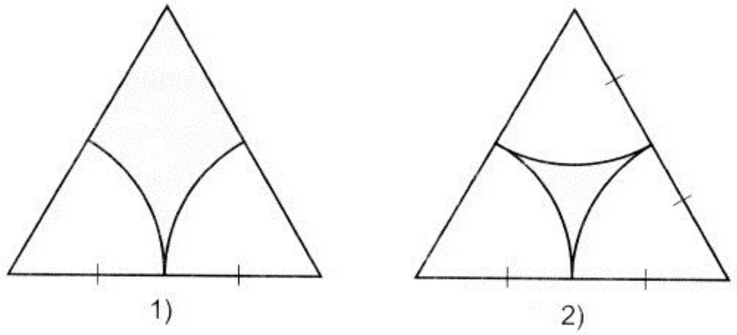
123. Mitu protsenti ringi pindalast moodustab ringi sisse kujundatud hulknurga pindala, kui hulknurgaks on

1) korrapärane nelinurk; 2) korrapärane kuusnurk; 3) korrapärane 12-nurk?

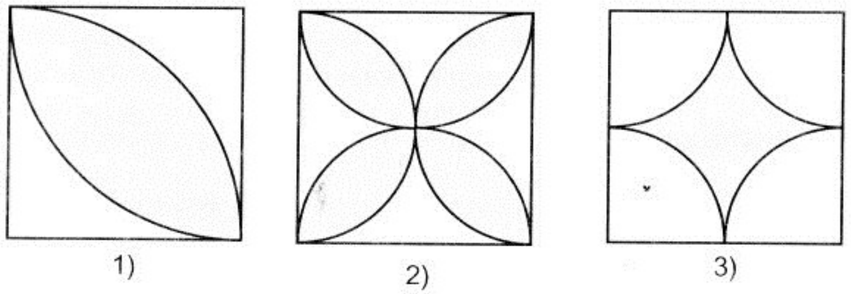
B

124. Mitu protsenti korrapärase kolmnurga pindalast on viirutatud (joon. 1.12)?

125. Leidke viirutatud osa pindala, kui ruudu külg on a (joon. 1.13).



Joon. 1.12



Joon. 1.13

126. Avaldage täisnurkse kolmnurga siseringjoone raadius kolmnurga kaatetite a ja b ning hüpotenuusi c kaudu.

127. Tuletage ringi pindala valem, lähtudes ringi ümber joonestatud korrapäraste puutujahulknurkade jadast.

128. Tuletage ringjoone pikkuse valem, lähtudes ringi ümber joonestatud korrapäraste puutujahulknurkade jadast.

129. Ringi raadiusega 4 dm joonestatakse korrapärane kõõlnelinurk, sellesse siseringjoon, sellesse omakorda korrapärane kõõlnelinurk jne. Leidke selles protsessis tekkivate hulknurkade pindalade summa piirväärtus.

130. Achilleus, vapraim kreeklane Trooja sõjas, alustas kilpkonnaga võidujooksu. Kilpkonn sai 100-meetrise edumaa. Achilleus jooksis kilpkonnast 10 korda kiiremini. Kui Achilleus oli läbinud 100 m, oli kilpkonn liikunud edasi 10 m ja omas seega 10 m edumaad. Kui Achilleus läbib need 10 m, on kilpkonn liikunud 1 m edasi. Kuigi Achilleus jõudis kilpkonnale järjest lähemale, oli kilpkonnal kogu aeg edumaa, ehkki lõpuks kuitahes väike. Kas Achilleus ei jõudnudki kilpkonnale järele? Kui jõudis, siis mitu meetrit pidi ta selleks jooksma?

1.7. ARV e PIIRVÄÄRTUSENA

Eelmises artiklis 1.6 leidsime, et matemaatikas laialt kasutatav konstant π on esitatav teatud jada piirväärtusena:

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}\right).$$

On leitud veel mitmeid teisigi hääbuvaid jadasid, mille liikmete lõpmatu summa esitub arvu π kaudu:

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n-1}+\ldots\right];$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\right);$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\ldots\right].$$

Matemaatikas on teinegi tähtis konstant, mis avaldub jada piirväärtuse kaudu. See on nn. Euleri[1] arv, mida tähistatakse tähega e. L. Euler leidis, et

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Uurime, millega võrdub see konstant. Selleks koostame järgneva tabeli:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
10	2,5937426
100	2,704813829
500	2,715568521
5000	2,718010051
10 000	2,718268216

Näeme, et järjekorranumbri n kasvades jääb jada liikmetel tõepoolest järjest rohkem kümnendkohti muutumatuks. L. Euler leidis arvu e 23 kümnendkohta. Arv e on irratsionaalarv:

e = 2,7 1828 1828 4590 4523… .

Selle konstandi kasutusvaldkondadega tutvume lähemalt ülejärgmises peatükis.

[1] Leonhard Euler (1707–1783) – šveitsi päritolu matemaatik.

Enesekontrolliks

131. Mis on arvjada?

132. Leidke jada üldliige, kui jada liikmeteks on

1) paaritud arvud alates 1-st;
2) paarisarvud alates 10-st;
3) 3-ga jaguvad arvud alates 6-st;
4) 10-st suuremad arvud, mis 3-ga jagamisel annavad jäägi 2.

133. Missuguseid jadasid nimetatakse tõkestamata jadadeks? Tooge näiteid.

134. Missuguseid jadasid nimetatakse tõkestatud jadadeks? Tooge näiteid.

135. Missuguseid jadasid nimetatakse hääbuvateks? Tooge näiteid.

136. Mitmendast liikmest alates on jada (a_n) liikmed väiksemad kui 0,001?

1) $a_n = \frac{2}{n+1}$; 2) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$.

137. Mitmendast liikmest alates on jada liikmed absoluutväärtuselt suuremad kui 1000?

1) $a_n = 3n + 7$; 2) $a_n = 5 - 7n$; 3) $a_n = \frac{n^2}{n+2}$.

138. Missugust jada nimetatakse aritmeetiliseks jadaks? Tooge näiteid.

139. Leidke aritmeetilise jada kolmas liige, kui $a_7 = 17$ ja $d = 1{,}5$.

140. Mitmes liige on arv 0 jadas, milles $a_1 = 4$ ja $d = -\frac{1}{3}$?

141. Aritmeetilises jadas on $a_3 + a_9 = 8$. Leidke jada esimese 11 liikme summa.

142. Leidke kõigi kahekohaliste naturaalarvude summa.

143. Rakett lendab pärast starti 1. sekundis 50 m, igas järgnevas sekundis aga 250 m rohkem kui eelmises. Mitu meetrit läbib rakett 26-ndas sekundis? Kui pika vahemaa on rakett läbinud 26 sekundiga?

144. Maanteel liiguvad teineteisele vastu kaks autot, mille vahemaa teatud hetkel on 200 m. Esimese auto kiirus on sel hetkel 12 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ja teise auto kiirus 20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Pidurdamise tõttu hakkab teise auto kiirus vähenema igas järgnevas sekundis 2 m võrra, kuid esimene auto jätkab sõitu endise kiirusega. Mitme sekundi pärast autod kohtuvad?

145. Millist jada nimetatakse geomeetriliseks jadaks? Tooge näiteid. Millal on geomeetriline jada hääbuv?

146. Leidke geomeetrilise jada kolm esimest liiget, kui $a_8 = -2^{-5}$ ja $q = 2^{-1}$.

147. Milliste x väärtuste korral on arvud $-\frac{2}{3}$, x, $-\frac{8}{3}$ 1) aritmeetilise jada, 2) geomeetrilise jada järjestikusteks liikmeteks?

148. Leidke geomeetrilise jada esimene liige ja tegur, kui $a_1 + a_3 = 74$, $a_2 + a_4 = 444$.

149. Leidke geomeetrilise jada kaheksas liige, kui $a_1 = 3$, $a_n = 96$ ja $S_n = 189$.

150. Vaakumpumba kolvi igal tõmbel väljub anumast üks kaheksandik seal olevast õhust. Leidke õhurõhk anumas pärast kolvi 20-ndat tõmmet, kui esialgne õhurõhk oli 760 mm Hg.

151. Ruudu sisse, mille külg on a, on joonestatud uus ruut, mille tippudeks on esialgse ruudu külgede keskpunktid. Saadud ruudu sisse on samal viisil joonestatud uus ruut jne. Leidke kõigi ruutude pindalade summa piirväärtus.

152. Leidke hääbuva geomeetrilise jada kolmas liige, kui jada summa on 1,6 ja jada teine liige on –0,5.

153. Millistel tingimustel nimetatakse arvu B jada (b_n) piirväärtuseks?

154. Leidke jada piirväärtus, kui jada üldliige on

1) $\frac{1}{2n+1}$; 2) $\frac{5n-12}{10(n+1)}$; 3) $\frac{n-3n^2}{n^2+n+1}$;

4) $\frac{3n^2}{2n-1}$; 5) $\frac{3n-1}{3n^2}$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

155. Leidke korrapärase kolmnurga sise- ja ümberringjoonte pikkused ning ringide pindalad, kui kolmnurga külg on 8 cm.

156. Ruudu diagonaal on $\sqrt{2}$ cm. Arvutage ruudu siseringjoone pikkus ja ringi pindala.

2. FUNKTSIOONID I

2.1. KORDAMINE

2.1.1. VÕRDELINE JA PÖÖRDVÕRDELINE SEOS (SÕLTUVUS)

157. Kilogramm õunu maksab 12 krooni. Esitage valem õunte hinna H leidmiseks sõltuvalt ostetud õunte kogusest k (kilogrammides).

158. Esitage valem korrapärase kolmnurga kõrguse h leidmiseks kolmnurga külje a kaudu.

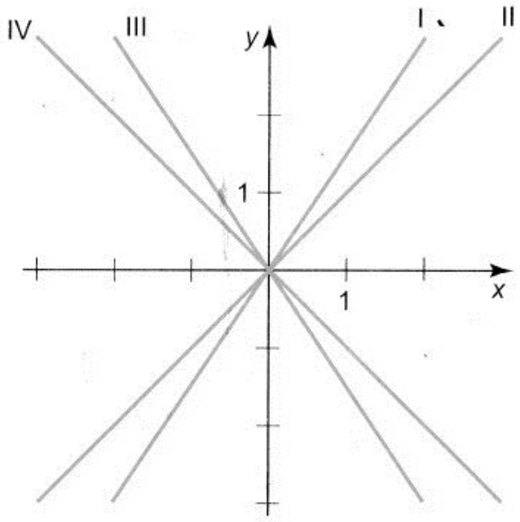
159. Esitage valem töötasu p arvutamiseks sõltuvalt töötatud ajast t (tundides), kui töötunni eest makstav tasu on 35 krooni.

Kui kaks muutujat x ja y on seotud valemiga $y = ax$, kus a on antud arv ($a \neq 0$), siis öeldakse, et muutuja y on võrdeline muutujaga x. Kui x ja y on võrdelises seoses, siis on nende jagatis konstantne: $\frac{y}{x} = a$ (kui $x \neq 0$).

160. Joonestage võrdelise seose $y = ax$ graafik, kui

1) $a = 2$; 2) $a = 5$;
3) $a = -2$; 4) $a = -0{,}5$.

Milline ühine omadus on kõigil nendel graafikutel? Milline geomeetriline tähendus on võrdeteguril a?



Joon. 2.1

161. Leidke joonisel 2.1 esitatud graafikute abil võrdetegur a.

162. Kolmnurga pindala on 20 cm^2. Esitage valem kolmnurga aluse a arvutamiseks kõrguse h kaudu.

163. Pagari kasutada on 150 kg jahu. Esitage valem päevas kulutatava jahu koguse k (kg) arvutamiseks sõltuvalt päevade arvust p.

164. Esitage valem 600 km pikkuse tee ühtlaseks läbimiseks kuluva aja t (h) arvutamiseks sõltuvalt kiirusest v $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$.

Kui kaks muutujat x ja y on seotud valemiga $y = \frac{a}{x}$, kus a on antud arv ($a \neq 0$), siis öeldakse, et muutuja y on pöördvõrdeline muutujaga x.
Kui x ja y on pöördvõrdelises seoses, siis on nende korrutis konstantne: $xy = a$.

165. Joonestage pöördvõrdelise seose $y = \frac{a}{x}$ graafik, kui

1) $a = 2$; 2) $a = 5$; 3) $a = -2$; 4) $a = -0{,}5$.

Milline ühine omadus on kõigil neil graafikutel? Kuidas nimetatakse pöördvõrdelise seose graafikut? Kuidas sõltub graafiku kuju parameetrist a? Missuguste a väärtuste korral asub funktsiooni graafik I ja III veerandis?

166. Millises tabelis on muutujad x ja y võrdelises seoses, millises pöördvõrdelises seoses?

1)

x	–3	–2	–1	0	1
y	1	0	–1	–2	–3

2)

x	–2	–1	0	1	
y	–4	–2	0	2	

3)

x	–4	–2	–1	2	4
y	12	6	3	–6	–12

4)

x	–3	–1	2	4	
y	–1,5	–0,5	1	2	2

5)

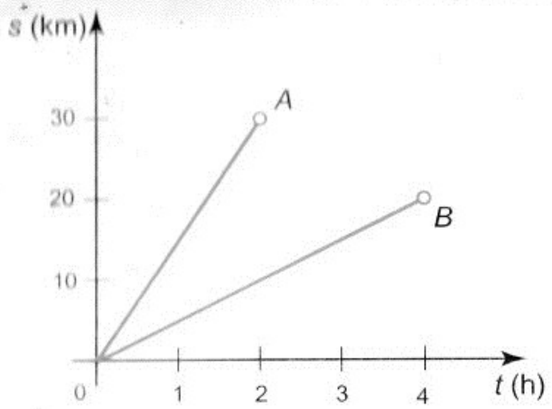
x	1	2	4	–6	–0,5
y	2	1	0,5	$-\frac{1}{3}$	–4

6)

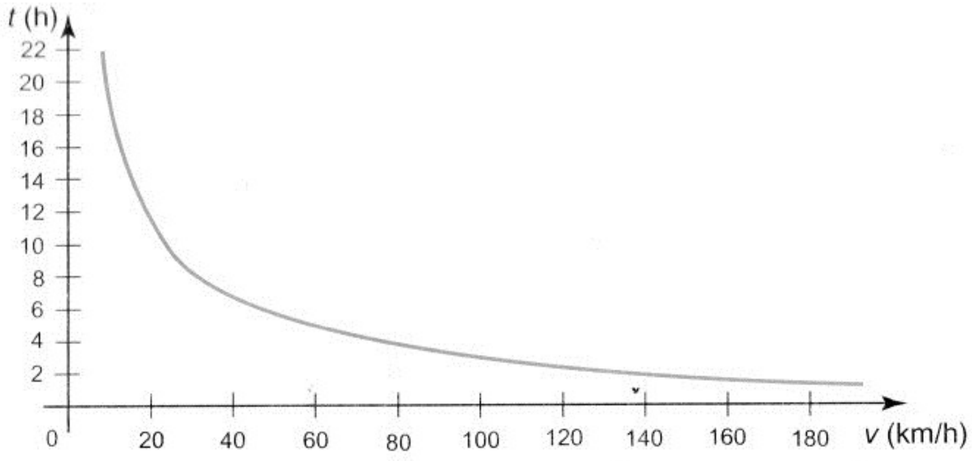
x	–1	–0,5	1	2	
y	3	6	–3	–1,5	

167. Joonisel 2.2 on jalakäija (lõik OB) ja jalgratturi (lõik OA) liikumise graafikud.

1. Kui kaua oli teel jalakäija ja kui kaua jalgrattur?
2. Kui pika tee läbis jalakäija ja kui pika jalgrattur?
3. Millise kiirusega liikus kumbki?



Joon. 2.2



Joon. 2.3

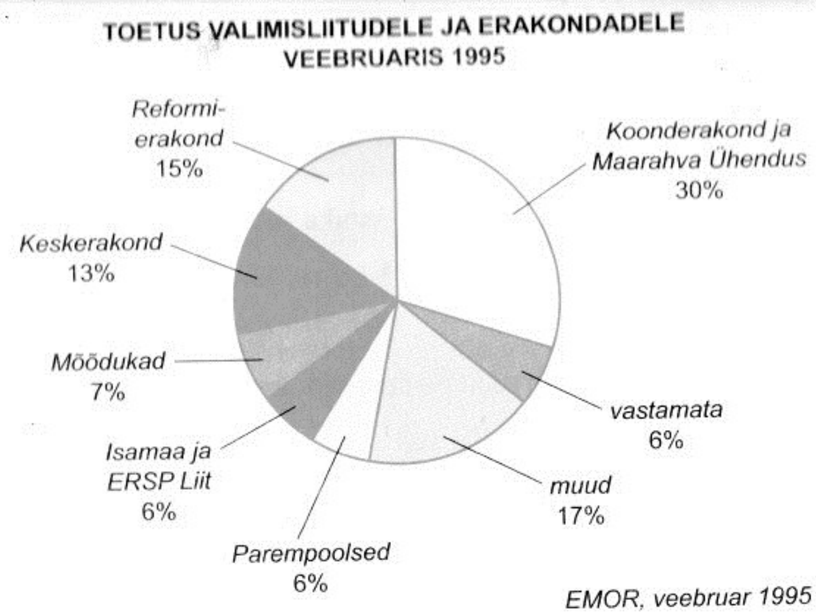
4. Mitu korda oli jalgratturi poolt 2 tunniga läbitud tee pikem jalakäija poolt sama ajaga läbitud teest?
5. Mitu tundi kulus kummalgi 20 km läbimiseks?

168. Joonisel 2.3 on graafik, mis väljendab teatud vahemaa läbimiseks kulunud aja t sõltuvust liikumise kiirusest v.

1. Kui palju aega kulub vahemaa läbimiseks kiirusega 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$; 65 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$?
2. Millise kiirusega tuleks sõita, et vahemaa läbimiseks kuluks 2 h; 2,5 h?
3. Kui pikk on läbitav vahemaa?
4. Kui kiiresti tuleks sõita, et sõiduks ei kuluks aega üle 3 tunni?

169. Valimisseaduse kohaselt pääsevad Riigikokku need valimisliidud ja erakonnad, keda toetab enam kui 5% valijatest. Kuidas jaotuksid 101 kohta Riigikogus valimiste eel läbiviidud küsitluse põhjal (joon. 2.4), kui erakonnad saavad kohti võrdeliselt toetajaskonnaga?

170. Kolm sõpra üürisid ühiselt auto linnast suvilatesse sõiduks ja maksid selle eest 660 krooni. Suvilad asusid ühe tee ääres 24 km, 28 km ja 36 km kaugusel linnast. Kui palju tuleb maksta igal sõbral, kui tasutakse võrdeliselt suvilate kaugustega linnast?



Joon. 2.4

171. Ehte valmistamiseks sulatati hõbedat ja kulda vahekorras 6 : 2,4. Hõbedat kulus 33 g. Mitu grammi võeti kulda?

172. Matemaatikaõpiku trükkimiseks kulub 4 töötajal 12 päeva. Mitu päeva kulub sama jõudluse korral õpiku trükkimiseks 2 töötajal; 6 töötajal; 10 töötajal; x töötajal?

173. Leidke valem, mis võimaldab kiirust v_1 $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$ teisendada kiiruseks v_2 $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$. Joonestage selle seose graafik, kandes x-teljele v_1 ja y-teljele v_2. Leidke graafikult v_2, kui $v_1 = 5$ $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

2.1.2. LINEAARFUNKTSIOON

174. Balloonis on 10,6 kg vedelgaasi. Gaasipliit kulutab igas tunnis 0,2 kg gaasi. Esitage seos gaasi hulga m (kg) ja pliidi töötamise aja t (h) vahel.

175. Terasvedru pikeneb koormuse suurenemisel iga kilogrammi mõjul 0,5 cm võrra. Väljendage vedru pikkus l (cm) koormuse p (kg) kaudu, kui vedru algpikkus on 5 cm.

176. Telefoni kuumaksu arvutamisel võetakse aluseks 75 krooni põhimaksu kuus. Sellele lisandub veel kaugekõnede maks 1,2 krooni kõneminuti eest. Esitage valem kuumaksu k arvutamiseks sõltuvalt kaugekõnede kestusest t (min), kui antud kuus peeti 15 kaugekõnet ja iga kõne alustamise tasu on 0,48 krooni.

Kui kaks muutujat x ja y on seotud valemiga $y = ax + b$, kus a ja b on antud arvud ning $a \neq 0$, siis öeldakse, et muutujad x ja y on lineaarses seoses.
Valem $y = ax + b$ esitab lineaarfunktsiooni.

177. Joonestage lineaarfunktsiooni $y = 2x - 1$ graafik. Vastake selle abil järgmistele küsimustele.

1. Missuguse x korral $y = 13$?
2. Millega võrdub y, kui $x = -2$?
3. Missuguste x väärtuste korral on y väärtused positiivsed; negatiivsed?

178. Joonestage lineaarfunktsioon $y = 3x + b$ graafik, kui

1) $b = 2$; 2) $b = 0$; 3) $b = -1$; 4) $b = -2$.

Võrrelge neid graafikuid. Milline geomeetriline tähendus on parameetril b?

179. Joonestage lineaarfunktsioon $y = ax + 5$ graafik, kui

1) $a = 5$; 2) $a = 1$; 3) $a = -1$; 4) $a = -0{,}5$.

Võrrelge neid graafikuid. Milliste a väärtuste korral on sirge tõusev, milliste korral langev? Milline geomeetriline tähendus on $|a|$-l?

180. On antud järgmised funktsioonid:

1) $y = -2x$; 2) $y = \frac{1}{2}x + 3$; 3) $y = x - 6$;

4) $y = \frac{1}{2}x - 1$; 5) $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Ilma funktsiooni graafikut joonestamata leidke, missugused sirged
1) on paralleelsed;
2) on risti;
3) lõikavad x-telge samas punktis;
4) lõikavad y-telge samas punktis;
5) läbivad punkti $A(10; 4)$;
6) on tõusvad;
7) läbivad koordinaatide nullpunkti;
8) on langevad.

181. Millised valemitest väljendavad võrdelist, millised pöördvõrdelist ja millised lineaarset seost, kui x ja y on muutujad, a ja b on arvud ($a \neq 0$)?

1) $y = a^2x$; 2) $y = ax^2$; 3) $y = \frac{3a}{x}$; 4) $y = \frac{4x}{3} + a$;

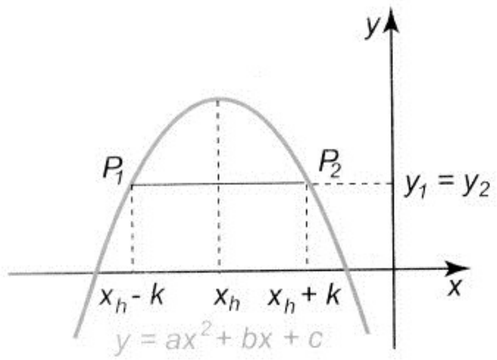
5) $y = (3 + a)x$; 6) $y = a + x^2$; 7) $y = 7 - \frac{4x}{3}$; 8) $y = \frac{b+1}{x}$.

2.1.3. RUUTFUNKTSIOON

182. Leidke valem võrdhaarse täisnurkse kolmnurga pindala S arvutamiseks kaateti a kaudu.

183. Leidke valem, mis võimaldab ristkülikukujulise aia pindala S arvutada aia laiuse x kaudu, kui aia ümbermõõt on 100 m.

Valem $y = ax^2 + bx + c$, kus a, b ja c on antud arvud ($a \neq 0$), esitab ruutfunktsiooni.



Joon. 2.5

Ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafikuks on parabool. Et parabooli täpsemalt joonestada, on tarvis teada parabooli nullkohti ja haripunkti koordinaate. Teame, et parabooli haripunkt asub parabooli teljel. Olgu haripunkti abstsiss x_h. Valime paraboolil kaks telje suhtes sümmeetrilist punkti $P_1(x_h - k;\ y_1)$ ja $P_2(x_h + k;\ y_2)$ (joon. 2.5). Nende punktide ordinaadid on võrdsed, s.t. $y_1 = y_2$. Et

$y_1 = a(x_h - k)^2 + b(x_h - k) + c$ ja $y_2 = a(x_h + k)^2 + b(x_h + k) + c$, siis saame võrrandi

$a(x_h - k)^2 + b(x_h - k) + c = a(x_h + k)^2 + b(x_h + k) + c$ ehk

$ax_h^2 - 2akx_h + ak^2 + bx_h - bk + c = ax_h^2 + 2akx_h + ak^2 + bx_h + bk + c$

ehk $-4akx_h = 2bk$, kust $x_h = -\frac{b}{2a}$.

Parabooli haripunkti abstsiss $x_h = -\frac{b}{2a}$.

Kuidas leida parabooli haripunkti ordinaati?

A

184. On antud järgmised ruutfunktsioonid:

1) $y = x^2 + 5x - 6$; 2) $y = 3x^2 - x$; 3) $y = -x^2 + 7x - 12$.

1. Leidke funktsiooni nullkohad.
2. Millega võrdub graafiku haripunkti abstsiss?
3. Joonestage funktsiooni graafik.
4. Milliste x väärtuste korral on y väärtused positiivsed, milliste korral negatiivsed?
5. Milliste x väärtuste korral on y väärtus -10?

185. Joonestage ruutfunktsiooni $y = ax^2$ graafik, kui

1) $a = 1$; 2) $a = -1$; 3) $a = 5$; 4) $a = -5$.

Missugused ühised omadused on nendel graafikutel?

186. Kirjeldage ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafiku asendit sõltuvalt kordajast a ja vastava ruutvõrrandi diskriminandist D.

187. Võrrelge funktsioonide $y = 2x^2$, $y = 2x^2 - x$, $y = 2x^2 - x + 8$ graafikuid. Milliste teisenduste tulemusena on üks graafik teisest saadud?

188. Leidke võrrand paraboolile, mis läbib punkte (0; 0), (2; 0) ja (3; 3). Kas punkt $A(10; 80)$ asub sellel paraboolil?

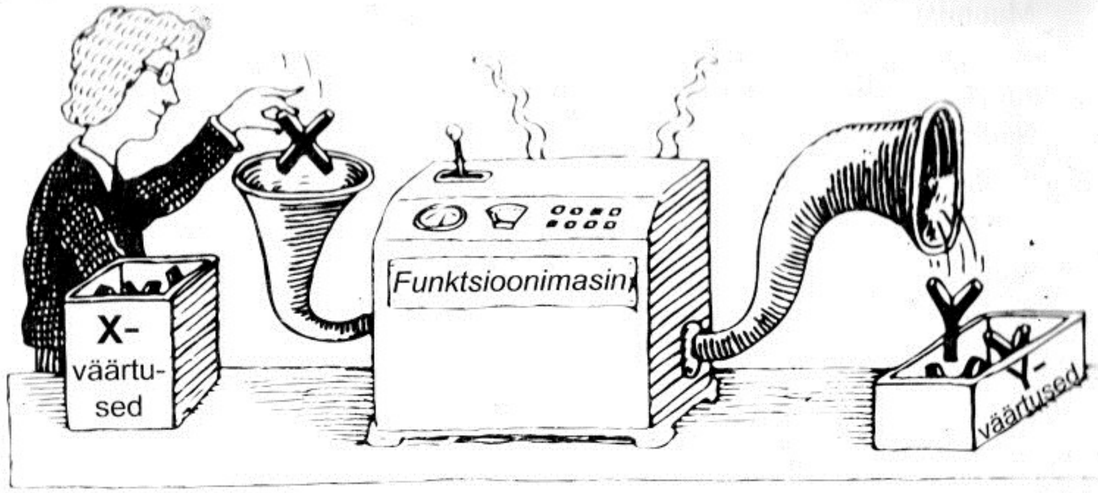
B

189. Pall, mis visatakse maapinnalt üles kiirusega 10 meetrit sekundis, on t sekundi möödudes kõrgusel $s = 10t - 0{,}5t^2$. Joonestage ts-teljestikus graafik, mis väljendab palli kõrguse sõltuvust ajast. Millisel ajahetkel on pall kõige kõrgemal? Milline on palli suurim kõrgus maapinnast?

190. Viie meetri kõrguselt visatakse kiirusega 50 meetrit sekundis vertikaalselt üles nool. Kõrgus h (meetrites), kus nool asub ajahetkel t (sekundites), on arvutatav valemiga $h = 5 + 50t - \frac{gt^2}{2}$, $g \approx 10\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Mitme sekundi pärast jõuab nool maapinnale tagasi? Milline on noole maksimaalne kõrgus?

191. Missuguste parameetri m väärtuste korral on ruutfunktsioonil a) ainult positiivsed väärtused; b) nii positiivsed kui ka negatiivseid väärtusi?

1) $y = x^2 + 2x + m - 10$;
2) $y = (m + 1)x^2 - 4x + 3$;
3) $y = x^2 + (m + 3)x + 6m - 2$;
4) $y = (m - 1)x^2 - 2(m + 1) + m$.



2.2. FUNKTSIOONI MÕISTE

Eelnevas vaatlesime seoseid

$y = ax$, $y = \frac{a}{x}$, $y = ax + b$ ja $y = ax^2 + bx + c$.

Ühine kõigile vaadeldud seostele on see, et on teada valem, mille järgi saame igale x väärtusele seada vastavusse y väärtuse. Teisiti öeldes, x ja y on omavahel seotud mingi kindla reegli järgi.

Meid ümbritsevas elus on mitmesuguseid vastavusi:

igale inimesele vastab tema vanus aastates;

igale Eesti Vabariigi kodanikule vastab tema isikukood;

igale 11. klassi õpilasele vastab kindel järjekorranumber klassi nimekirjas;

igale 11. klassi õpilasele vastab üks matemaatika koondhinne 10. klassi tunnistusel;

igale autole vastab tema registreerimismärk;

igale ringile raadiusega r vastab kindel ringi pindala S jne.

Esitatud vastavuste puhul on alati tegemist kahe suurusega (näiteks inimene ja tema vanus, ringi raadius r ja ringi pindala S). Need suurused võivad omandada erinevaid väärtusi mingist hulgast. Näiteks inimeste vanuste korral kuulub üks suurus (inimene) Maal elavate inimeste hulka, teise suuruse (vanus) väärtused kuuluvad naturaalarvude hulka.

Kui x tähistab suvalist elementi mingist suuruste hulgast, siis öeldakse, et x on **muutuv suurus** ehk **muutuja**. Seega on vaadeldud vastavuste puhul tegemist kahe muutuva suurusega. Kui muutub üks nendest suurustest, siis muutub ka teine suurus. Näiteks kui valime välja õpilase A, vastab temale üks järjekorranumber klassi nimekirjast; kui valime teise õpilase B, vastab temale juba uus number jne. Ühte kahest vaadeldavast suurusest me muudame ise, kuid teine suurus muutub sellest sõltuvalt.

Muutujat, millele me võime ise teatud hulgast vabalt väärtusi anda, nimetatakse **sõltumatuks muutujaks**. Muutujat, mille väärtused leitakse vastavalt sõltumatu muutuja väärtustele, nimetatakse **sõltuvaks muutujaks**.

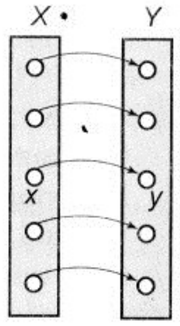
Näiteks ringi raadiust r võime vaadelda sõltumatu muutujana ja selle ringi pindala S sõltuva muutujana, mille väärtus arvutatakse sõltuvalt r väärtusest eeskirja $S = \pi r^2$ järgi. On olemas kindel eeskiri, mille alusel igale Eesti Vabariigi kodanikule (sõltumatu muutuja) seatakse vastavusse tema isikukood (sõltuv muutuja).

Mõned suurused meid ümbritsevas elus on sellised, mis küll mõlemad muutuvad, kuid ühe suuruse etteantud väärtus ei määra veel teise suuruse väärtust. Näiteks ei saa täpselt määratleda, kuidas on seotud inimese pikkuse ja kehakaalu muutumine või õppimiseks kulutud aeg ja saadud hinne. Enamik eelnevas vaadeldud vastavustest olid aga sellised, et niipea kui sõltumatu muutuja väärtus on teada, on sõltuva muutuja väärtus üheselt määratud. Selliseid vastavusi nimetatakse funktsioonideks.

Funktsiooniks[1] nimetatakse vastavust (eeskirja), mis seab sõltumatu muutuja *x* igale väärtusele hulgast *X* vastavusse sõltuva muutuja *y* ühe kindla väärtuse hulgast *Y*.

Hulka X nimetatakse funktsiooni **määramispiirkonnaks**. Hulk Y, millesse kuuluvad sõltuva muutuja väärtused, peab sisaldama kõiki neid y väärtusi, mis vastavad kõikvõimalikele x väärtustele määramispiirkonnast X. Järgnevas eeldame, et muid elemente hulk Y ei sisalda, s.t. hulga Y iga element vastab mingile $x \in X$ väärtusele. Sel juhul on hulk Y funktsiooni **muutumispiirkond** (joon. 2.6).

Funktsiooni määramispiirkond *X* on sõltumatu muutuja ehk argumendi *x* väärtuste hulk. Funktsiooni muutumispiirkond *Y* on sõltuva muutuja *y* väärtuste ehk funktsiooni väärtuste hulk.



Joon. 2.6

Järgnevates paragrahvides vaadeldakse selliseid funktsioone, kus X ja Y on arvuhulgad.

Funktsiooni esitavat vastavust märgitakse üles järgmiselt:

$y = f(x)$, kus $x \in X$ ja $y \in Y$ ja f on eeskiri, mille kohaselt argumendi igale väärtusele seatakse vastavusse funktsiooni väärtus. Vastavust võib tähistada ka teiste tähtedega, näiteks $y = g(x)$.

[1] Funktsiooni mõiste võttis kasutusele saksa matemaatik Gottfried Wilhelm Leibniz 17. sajandi lõpul.

Suurus $f(x)$ tähistab funktsiooni f väärtust, mis vastab argumendi väärtusele x.

Kirjutis $f(a)$ tähistab funktsiooni $y = f(x)$ väärtust, kui argument $x = a$.

Kui funktsiooni määramispiirkonda pole eraldi antud, siis moodustavad määramispiirkonna kõik need arvud, mille korral funktsiooni väärtus $f(x)$ on leitav.

Näide 1.

On antud hulgad $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ ja $Y = \{6; 7; 8; 9; 10\}$. Sel juhul on hulgal X määratud funktsioon $f(x) = x + 5$. Selle funktsiooni määramispiirkond X ja muutumispiirkond Y koosnevad mõlemad 5 elemendist.

Näide 2.

Funktsiooni $f(x) = 2x - 1$ määramispiirkonnaks on kogu reaalarvude hulk **R**, sest $f(x)$ väärtust on võimalik leida x mistahes reaalarvulise väärtuse korral. Näiteks $f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$; $f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ jne. Vaadeldava funktsiooni muutumispiirkonnaks on samuti kogu reaalarvude hulk **R**. *Veenduge selles funktsiooni graafiku abil.*

Näide 3.

Funktsiooni $y = \frac{5}{x}$ määramispiirkonda kuuluvad kõik reaalarvud peale nulli. Kui $x = 0$, pole y väärtus arvutatav. Seega $X = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Näide 4.

Funktsiooni $y = \sqrt{x - 8}$ määramispiirkonna moodustavad argumendi need väärtused, mille korral $x - 8 \geq 0$ (ruutjuurt saab leida vaid mittenegatiivsetest arvudest). Seega $X = [8; \infty)$.

Näide 5.

Eelmises peatükis käsitletud jadasid võib samuti vaadelda kui funktsioone, sest igale naturaalarvule $n \geq 1$ seatakse jadas mingi eeskirja järgi vastavusse a_n. Seega

jada on funktsioon, mille määramispiirkonnaks on positiivsete naturaalarvude hulk.

A

192. Leidke järgnevate paaride hulgast need, mille vaheline vastavus määrab funktsiooni. Määrake, kumb on sõltumatu ja kumb sõltuv muutuja.

1) sõidupileti hind ja sõidetava tee pikkus;
2) ruudu külg ja ruudu pindala;
3) vaskjuhtme pikkus ja juhtme temperatuur;
4) veerõhk allveelaevale ja allveelaeva sügavus;
5) auto kiirus ja paagis oleva bensiini kogus;
6) ühtlase liikumise algusest möödunud aeg ja läbitud teepikkus.

193. On antud funktsioon $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Leidke $f(0), f(-1), f(0{,}5)$ ja $f(-3)$.

194. Tabelis on ühe ööpäeva kestel mõõdetud õhutemperatuur.

aeg	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
$t°$	3	2	3	8	10	14	18	20	21	20	16	9

Millise kahe muutujaga on tegemist? Kumb on sõltumatu ja kumb sõltuv muutuja? Kas on tegemist funktsiooniga? Miks? Jaatava vastuse korral leidke hulgad X ja Y.

195. Leidke funktsiooni määramispiirkond.

1) $y = 17 - 3x$; 2) $y = x^2 + 3x$; 3) $y = \sqrt{8 - x}$;

4) $y = \sqrt{3x + 6}$; 5) $y = \dfrac{15}{x+1}$; 6) $y = \dfrac{x-1}{x^2 + x}$;

7) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$; 8) $y = \sqrt{\dfrac{x^2+4}{x-7}}$; 9) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+6x}}{x}$;

10) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$; 11) $y = \dfrac{x-6}{\sqrt{x^2-1}}$; 12) $y = \sqrt{1-x^2} + \dfrac{2-x}{13+5x}$.

B

196. Leidke funktsiooni määramispiirkond.

1) $y = \dfrac{3}{x+1} + \sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt{\dfrac{x - x^2}{2x+4}}$;

3) $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{3+x}}$; 4) $y = \sqrt[3]{x+8} - \sqrt{x-5}$;

5) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x + 6}{6 + 3x - 3x^2}}$; 6) $y = \sqrt{x^2 + 5x} - \dfrac{x}{\sqrt{6-x}}$.

2.3. FUNKTSIOONI ESITUSVIISID

Nagu eelnevas kogesime, võib funktsiooni esitada mitmel erineval viisil. Järgnevas vaatleme funktsiooni põhilisi esitusviise.

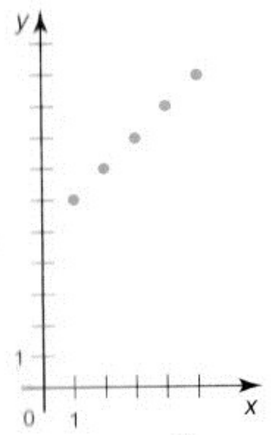
1. Valem ehk analüütiline esitus

Sel juhul on antud võrdus, mille kohaselt on vastavalt x väärtusele võimalik arvutada y väärtust. Valemist nähtub, milliseid tehteid ja millises järjekorras tuleb argumendi väärtusega teha, et saada vastav funktsiooni väärtus. Kui näiteks funktsioon on antud valemiga $y = x^2 + 1$, siis on iga reaalarvulise x jaoks selle valemi abil võimalik y arvutada.

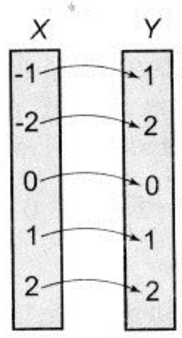
Funktsioon võib olla esitatud ka mitme valemiga. Kahe valemiga esitatud funktsioon on näiteks $y = \begin{cases} x, \text{kui } x \geq 0 \\ -x, \text{kui } x < 0 \end{cases}$ (ehk $y = |x|$).

2. Graafik

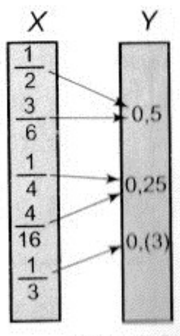
Graafik võimaldab funktsiooni kujutada piltlikumalt. Graafikult on funktsiooni mitmed omadused selgemini nähtavad kui valemist. Funktsiooni f graafiku moodustavad tasandi need punktid, mille koordinaadid on $(x; f(x))$. Tavaliselt on funktsiooni graafikuks mingi joon. Iga joon ei ole funktsiooni graafikuks. Funktsiooni graafikuks saab olla vaid selline joon, mille korral igale x väärtusele vastab vaid üks punkt sellel joonel. Tavaliselt on koordinaatteljestikus võimalik kujutada vaid osa funktsiooni graafikust. Funktsiooni graafik võib koosneda kas üksikutest punktidest, pidevast joonest või mitmest pidevast joonest. Näiteks artiklis 2.2 näites 1 esitatud funktsiooni graafik koosneb 5 punktist (joon. 2.7). Praktikas leiavad laialdast kasutamist näiteks liikumise graafikud, kardiogrammid jne.



Joon. 2.7



Joon. 2.8



Joon. 2.9

3. Tabel

Tabelis esitatakse ühes reas (või veerus) argumendi x väärtused, teises reas (veerus) sellele vastavad funktsiooni väärtused. Näiteks oli funktsioon esitatud tabelina ülesandes 194. Varasemast olete tuttavad ka näiteks arvu ruudu (funktsiooni $y = x^2$, $x \in \mathbf{N}$), arvu kuubi ja ruutjuure tabelitega. Funktsiooni esitust tabelina kasutatakse tihti abivahendina funktsiooni graafiku joonestamisel, kui funktsioon on antud valemiga.

Mõnikord täiendatakse funktsiooni esitavat tabelit nii, et näidatakse nooltega, missugune element hulgast Y vastab igale elemendile hulgast X (joon. 2.8). Selline esitus võimaldab paremini näha, kas vastavus kahe hulga vahel on funktsioon või mitte. Funktsiooni puhul on oluline, et 1) argumendi igale väärtusele vastaks funktsiooni väärtus ja 2) et neid väärtusi oleks argumendi iga väärtuse jaoks vaid üks. Sel juhul peab hulga X iga elemendi juurest lähtuma täpselt üks nool.

4. Arvupaarid

Funktsiooni sellise esituse jaoks moodustame kõikvõimalikud järjestatud arvupaarid, milles esimesel kohal on argumendi väärtus ja teisel kohal sellele vastav funktsiooni väärtus.

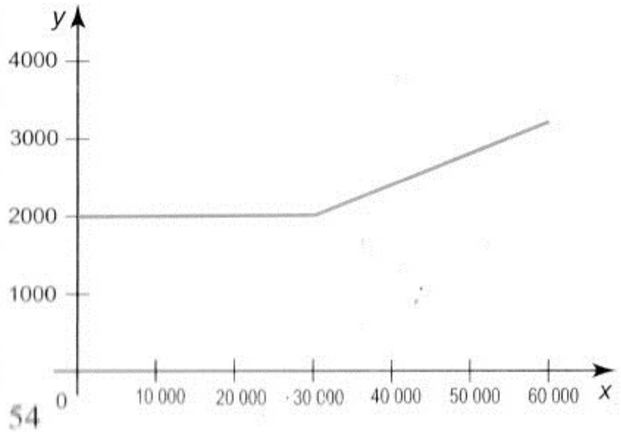
Näiteks olgu antud funktsioon $y = |x|$, kus $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Selle funktsiooni võime esitada arvupaaridena järgmiselt: $\{(-2; 2), (-1; 1), (0; 0), (1; 1), (2; 2)\}$.

Näide 1.

Joonisel 2.9 on esitatud funktsioon, sest igale väärtusele (harilikule murrule) hulgast X vastab ainult üks element (kümnendmurd) hulgast Y.

Näide 2.

Kodumasinate müüja põhipalk on 2000 krooni kuus. Kui kuu läbimüük ületab 30 000 krooni, makstakse müüjale tasu 40% põhipalgast ja 4% läbimüügist. Leiame valemi müüja kuupalga y arvutamiseks sõltuvalt läbimüügist x. Kuupalk on muutumatu, kui läbimüük ei ületa 30 000 krooni kuus. Kui $x \in [0; 30\,000]$,



Joon. 2.10

siis $y = 2000$. Kui $x > 30\,000$, siis $y = 0{,}4 \cdot 2000 + 0{,}04x = 800 + 0{,}04x$.
Lühemalt võib selle esitada järgmiselt:

$$y = \begin{cases} 2000, \text{ kui } x \in [0; 30000] \\ 800 + 0{,}04x, \text{ kui } x > 30000 \end{cases}$$

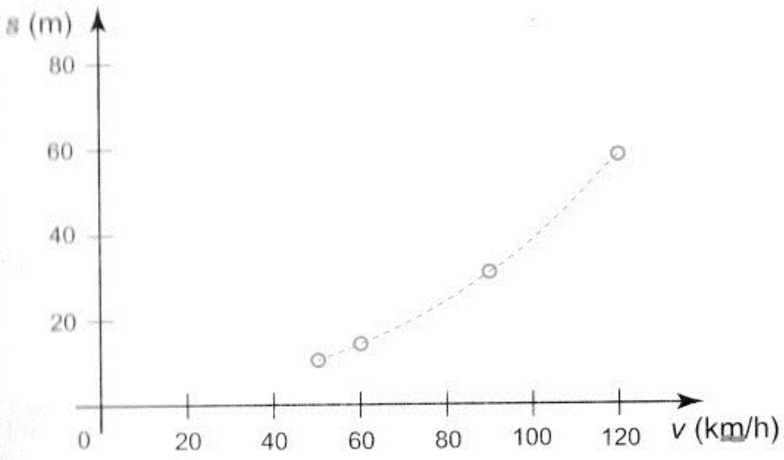
Selle funktsiooni graafik on kujutatud joonisel 2.10.

Näide 3.

Autofirma uuris auto pidurdustee pikkust sõltuvalt auto kiirusest ja sai järgmised tulemused:

Auto kiirus v (km/h)	50	60	90	120
Pidurdustee pikkus s (m)	10,0	14,5	32,5	58,0

Seos nende kahe suuruse vahel on funktsioon. Püüame esitatud andmete põhja leida üldist valemit, mis võimaldaks leida auto pidurdustee pikkust s (meetrites sõltuvalt auto kiirusest v (kilomeetrit tunnis). Kanname selleks kõigepealt vastavad punktid koordinaatteljestikku (joon. 2.11).



Joon. 2.11

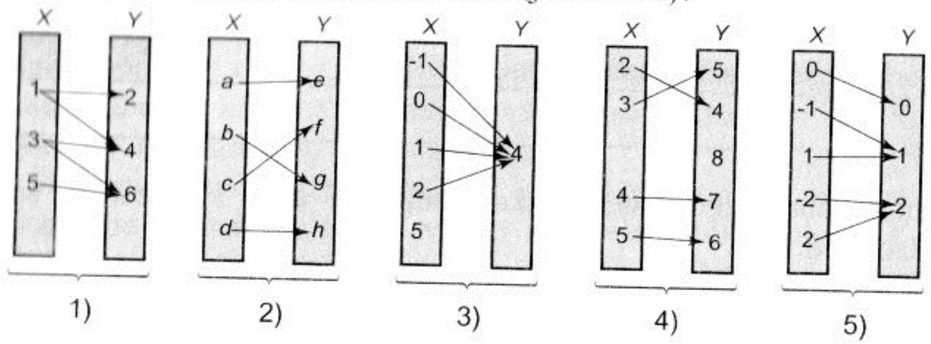
Näeme, et need punktid ei asu ühel sirgel. Meile tuntud funktsioonidest on saadud graafik kõige enam sarnane paraboolile (ruutfunktsiooni graafikule). Et auto kiiruse 0 km/h puhul on ilmselt ka pidurdustee pikkus 0 m, siis läbib antud parabool koordinaatide alguspunkti. Sellise parabooli võrrand on $y = ax^2$. Parameetri a väärtuse määrame meie tabeli andmete põhjal näiteks nii:

$10{,}0 = a \cdot 50^2$, kust $a = \dfrac{10{,}0}{2500} = 0{,}004$ ja valem pidurdustee pikkuse leidmiseks on $s = 0{,}004v^2$.

Selle valemi põhjal saame leida pidurdustee pikkust auto igasuguse kiirus jaoks, samuti vastavalt pidurdustee pikkusele leida auto kiirust. Näiteks, ku auto kiirus on 100 km/h, on pidurdustee $0{,}004 \cdot 10\,000 = 40$ meetrit pikk.

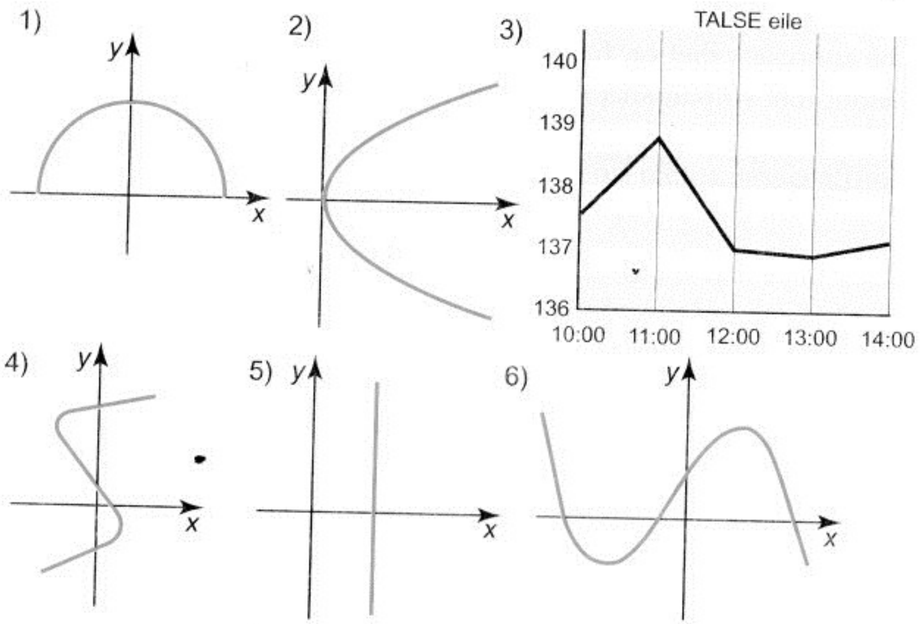
A

197. Kas hulgal X on määratud funktsioon (joon. 2.12)?

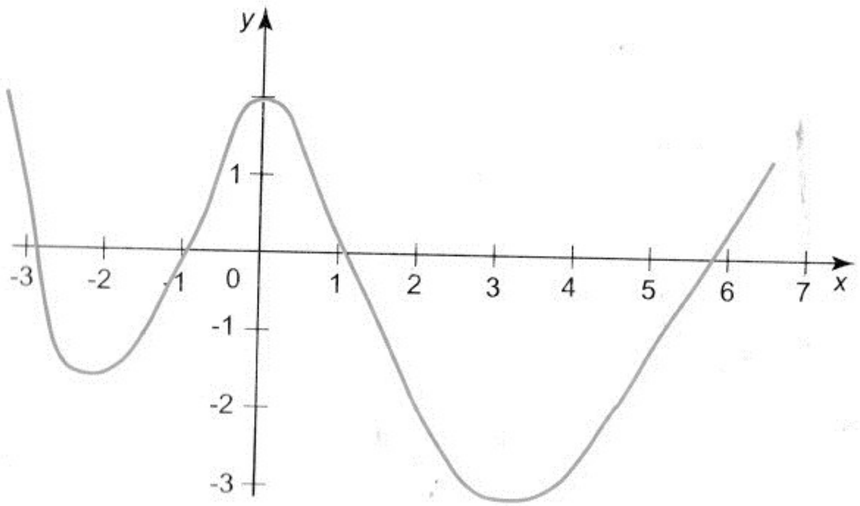


Joon. 2.12

198. Milline joonisel 2.13 olevatest joontest esitab funktsiooni? Miks?



Joon. 2.13



Joon. 2.14

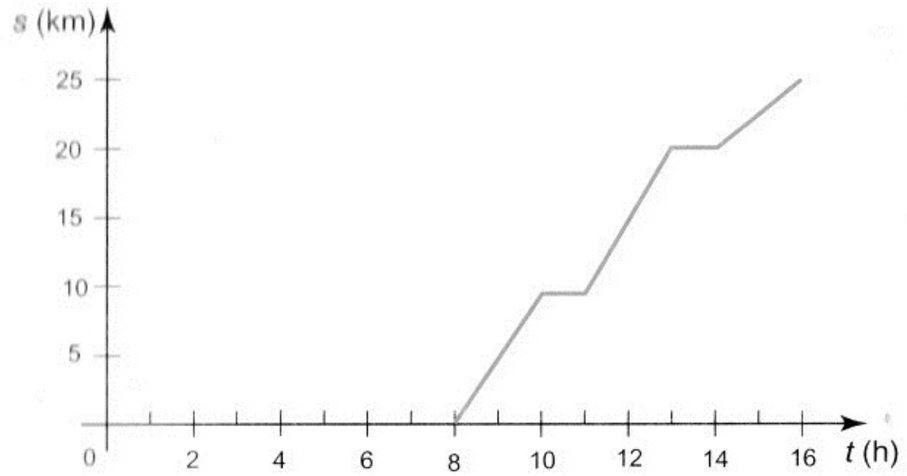
199. Täitke funktsiooni graafiku (joon. 2.14) põhjal tabel.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y									

200. Maastikuautode pidurdustee pikkuse katsetamisel sai autofirma järgmised tulemused:

Auto kiirus v (km/h)	50	90	120
Pidurdustee pikkus s (m)	17,5	56,7	100,8

1. Leidke valem maastikuauto pidurdustee pikkuse s (meetrites) leidmiseks sõltuvalt auto kiirusest v (km/h).
2. Kui pikk on auto pidurdustee, kui auto sõidab kiirusega 80 km/h; 100 km/h?
3. Kui kiiresti sõitis auto, kui pidurdustee pikkus oli 62,2 m; 24,5 m?



Joon. 2.15

201. Turist matkab Tartust Elvasse. Tema poolt läbitud teepikkuse sõltuvust kellaajast väljendab joonis 2.15.

1. Kui palju aega kulus kogu matkaks ja kui palju sellest puhkusteks?
2. Mitu kilomeetrit läbis ta esimese tunni jooksul?
3. Kui palju aega kulus esimese 10 km ja kui palju viimase 10 km läbimiseks?
4. Leidke vastava funktsiooni määramispiirkond X ja muutumispiirkond Y.

202. Koerale on vaja 100 m pikkusest võrgust teha ristkülikukujuline aed. Leidke valem funktsioonile, mis väljendab aia pindala S sõltuvust aia pikkusest x. Joonestage selle funktsiooni graafik, leidke määramis- ja muutumispiirkond. Leidke graafikult, missuguse pikkuse x korral on aia pindala suurim.

B

203. Joonestage funktsiooni graafik.

1) $y=\begin{cases} x^2, \text{ kui } x<1 \\ 2-x, \text{ kui } x\geq 1 \end{cases}$;

2) $y=\begin{cases} 2x+3, \text{ kui } x<-1 \\ x^2-2, \text{ kui } x\geq -1 \end{cases}$;

3) $y=|2x+3|-x$;

4) $y=x+\dfrac{x}{|x|}$.

204. Kartongitükist mõõtmetega 8 cm ja 12 cm tahetakse teha pealt lahtine kompvekikarp nii, et kartongi igast nurgast lõigatakse välja ruut küljepikkusega x cm. Allesjäänud osa ääred keeratakse üles. Avaldage karbi ruumala V argumendi x funktsioonina. Leidke funktsiooni määramispiirkond.

205. Autosid üüriv firma võtab laenutajalt 10 krooni iga läbisõidetud kilomeetri eest, kui läbisõit ei ületa 100 km. Kui läbisõit on üle 100 km, siis võetakse tasu esimese 100 km eest endiselt 10 krooni kilomeetri kohta ja 7 krooni iga järgneva kilomeetri kohta. Esitage valem, mis võimaldab arvutada üüritasu y sõltuvalt läbisõidetud kilomeetrite arvust x. Joonestage funktsiooni graafik. Kui suur on auto üür, kui läbisõit on 300 km?

206. Suvilale tuleb teha aken, mis koosneb ristkülikust ja selle peal olevast poolringist. Akna pindala on 24 dm^2. Avaldage akna väline ümbermõõt C akna laiuse x funktsioonina.

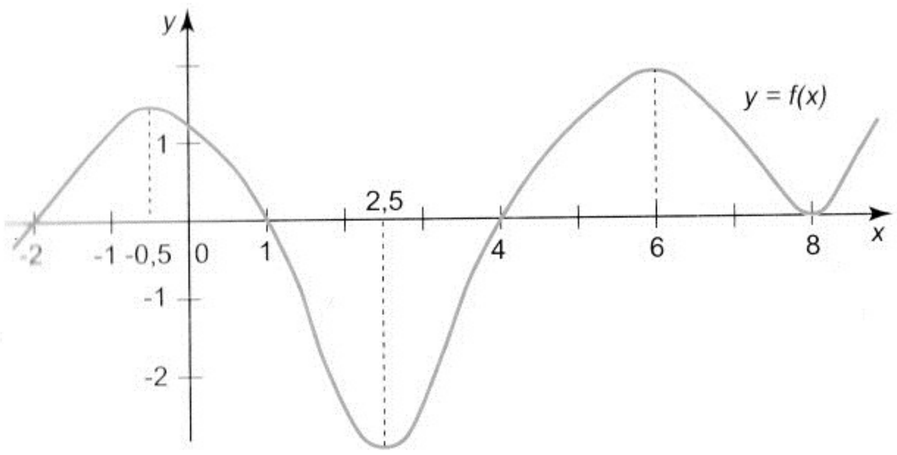
2.4. FUNKTSIOONI NULLKOHAD. FUNKTSIOONI POSITIIVSUS- JA NEGATIIVSUSPIIRKOND

Järgnevas asume uurima funktsioonide omadusi. Vaatleme funktsiooni $y=f(x)$ graafikut (joon. 2.16). Oletame, et väljaspool lõiku $[-2; 8]$ jätkub funktsiooni graafik nii, nagu jooniselt paistab (vasakult alla, paremalt üles).

Selle funktsiooni määramispiirkond $X=\mathbf{R}$ ja samuti $Y=\mathbf{R}$, sest funktsioon omandab kõik väärtused vahemikus $(-\infty; \infty)$. Toome määramispiirkonnast välja need osad, kus funktsiooni väärtused on positiivsed, negatiivsed või võrdsed nulliga.

Argumendi väärtusi, mille korral funktsiooni väärtus on 0, nimetatakse funktsiooni nullkohtadeks. Funktsiooni nullkohtade leidmiseks tuleb määrata punktid x, kus $f(x)=0$.

Nullkohtade hulka tähistatakse sümboliga X_0. Funktsiooni nullkohtades lõikab või puudutab graafik x-telge. Vaadeldaval funktsioonil $y=f(x)$ on neli nullkohta (joon. 2.16): $x_1=-2$, $x_2=1$, $x_3=4$, $x_4=8$ ehk $X_0=\{-2; 1; 4; 8\}$.



Joon. 2.16

Funktsiooni positiivsuspiirkonna moodustavad argumendi need väärtused, mille korral funktsiooni väärtus on positiivne. Funktsiooni positiivsuspiirkonna leidmiseks tuleb määrata punktid x, kus $f(x)>0$.

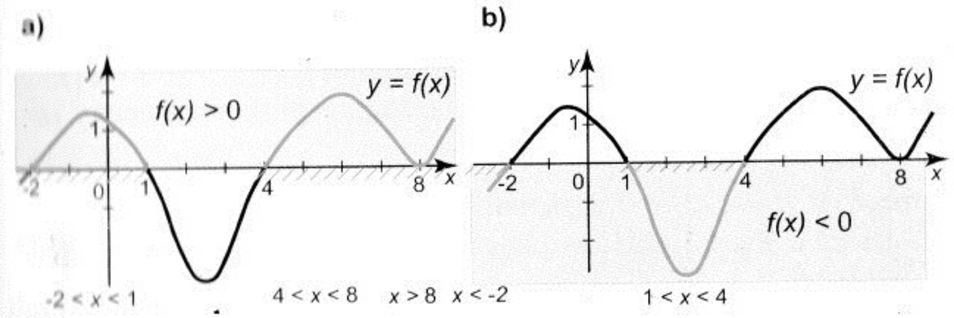
Funktsiooni negatiivsuspiirkonna moodustavad argumendi need väärtused, mille korral funktsiooni väärtus on negatiivne. Funktsiooni negatiivsuspiirkonna leidmiseks tuleb määrata punktid x, kus $f(x)<0$.

Funktsiooni positiivsuspiirkonda tähistame X^+ ja negatiivsuspiirkonda X^-. Kui funktsiooni väärtused on positiivsed, siis asub funktsiooni graafik selles piirkonnas ülalpool x-telge (joon. 2.17a). Negatiivsuspiirkonnas asub graafik allpool x-telge (joon. 2.17b).

Vaadeldava funktsiooni korral

$X^+=(-2; 1)\cup(4; 8)\cup(8; \infty)$ ja $X^-=(-\infty; -2)\cup(1; 4)$.

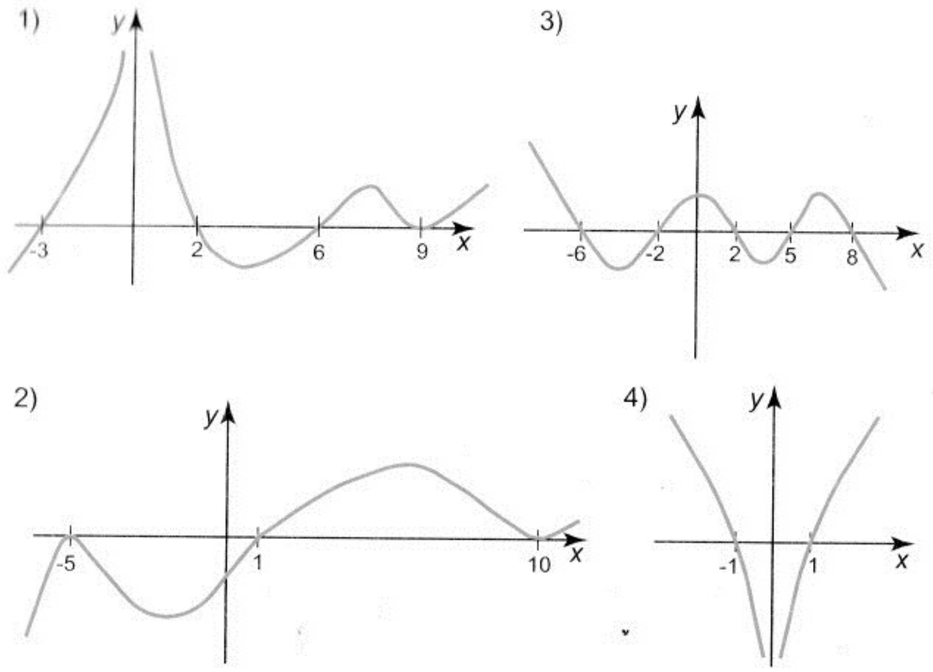
Üldiselt $X=X_0\cup X^+\cup X^-$.



Joon. 2.17

A

207. Leidke funktsiooni määramispiirkond, muutumispiirkond, nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond (joon. 2.18).



Joon. 2.18

208. Leidke funktsiooni määramispiirkond, nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond.

1) $y = 5 - 10x$;
2) $y = 3(x - 4)$;
3) $y = 4x - x^2$;
4) $y = \frac{-4}{x} + x$;
5) $y = 10 - \frac{2}{x}$;
6) $y = x^3 - 5x^2 - 14x$;
7) $y = (x + 5)(2x - 5)$;
8) $y = -2x^2 - 5x + 3$;
9) $y = 3x^2 + 4$;
10) $y = |5x - 6|$;
11) $y = |4 - 3x| - 2$;
12) $y = \frac{x - 7}{4x^2 - 36}$.

B

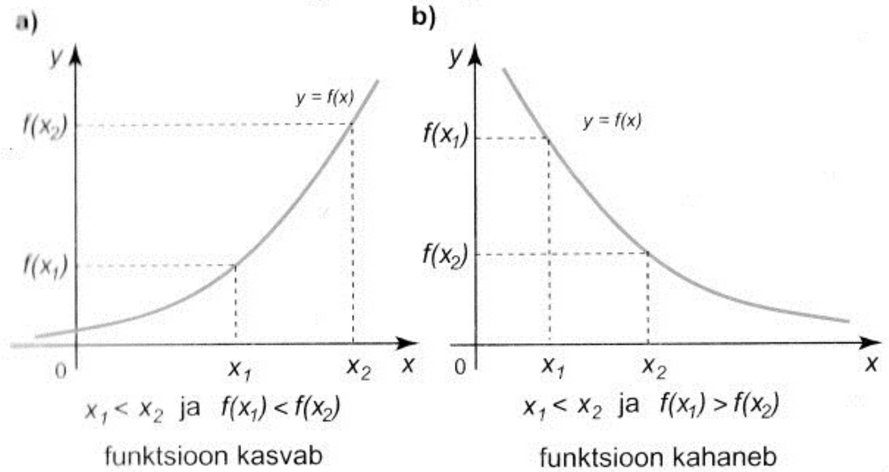
209. Milliste parameetri m väärtuste korral on ruutfunktsiooni $y = (2m - 5)x^2 - 4(m - 1)x + 3m$ väärtused kogu määramispiirkonnas negatiivsed?

210. Milliste parameetri a väärtuste korral on ruutfunktsiooni $y = (a - 1)x^2 - (a + 1)x + a + 1$ väärtused kogu määramispiirkonnas positiivsed?

211. Missuguste parameetri a väärtuste korral on funktsioonil $y = x^3 + ax^2 + x$ ainult üks nullkoht?

2.5. FUNKTSIOONI KASVAMINE JA KAHANEMINE. FUNKTSIOONI EKSTREEMUMKOHAD

Jätkame funktsioonide omaduste uurimist. Kui argumendi väärtused järjest suurenevad, s.t. kui liigume x-teljel vasakult paremale, siis mõnikord ka funktsiooni väärtused suurenevad (joon. 2.19a), kuid mõnikord vähenevad (joon. 2.19b).



Joon. 2.19

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse kasvavaks vahemikus $(a; b)$, kui selles vahemikus argumendi väärtuste suurenedes ka funktsiooni vastavad väärtused suurenevad: kui $x_1 < x_2$, siis ka $f(x_1) < f(x_2)$.

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse kahanevaks vahemikus $(a; b)$, kui selles vahemikus argumendi väärtuste suurenedes funktsiooni vastavad väärtused vähenevad: kui $x_1 < x_2$, siis $f(x_1) > f(x_2)$.

Maksimaalse pikkusega vahemikku, milles funktsioon kasvab, nimetatakse funktsiooni **kasvamisvahemikuks**, maksimaalse pikkusega vahemikku, milles funktsioon kahaneb, nimetatakse funktsiooni **kahanemisvahemikuks**.

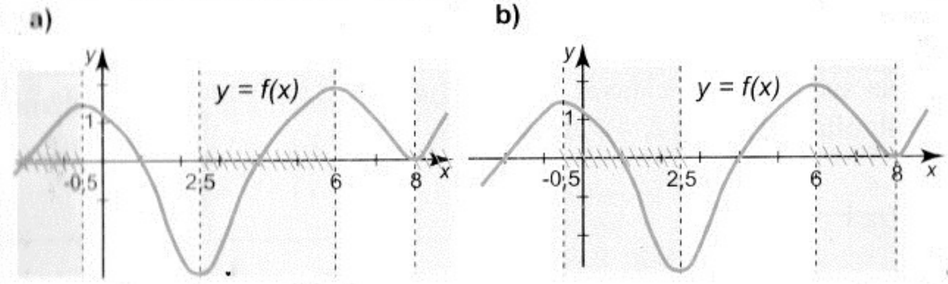
Funktsiooni kasvamisvahemiku tähis on $X\uparrow$ ja kahanemisvahemiku tähis $X\downarrow$.

Näide 1.

Joonisel 2.16 esitatud funktsioonil on kolm kasvamisvahemikku (joon. 2.20a) ja kaks kahanemisvahemikku (joon. 2.20b):

$X_1\uparrow = (-\infty; -0{,}5)$, $X_2\uparrow = (2{,}5; 6)$, $X_3\uparrow = (8; \infty)$.

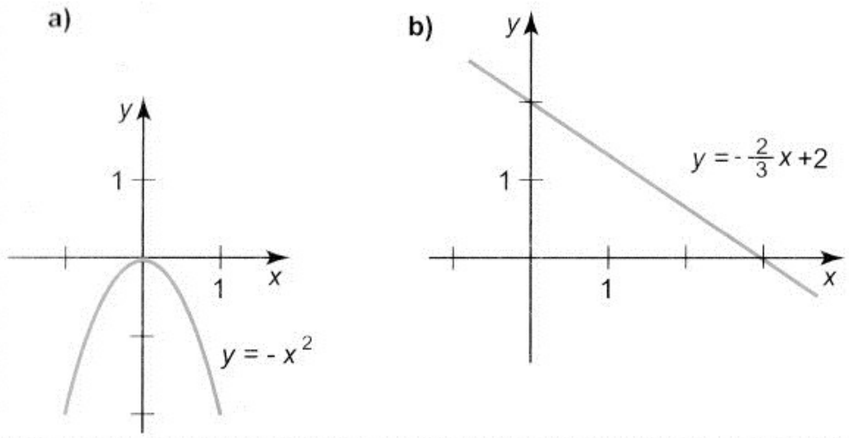
$X_1\downarrow = (-0{,}5; 2{,}5)$, $X_2\downarrow = (6; 8)$.



Joon. 2.20

Näide 2.

Funktsioon $y = -x^2$ (joon. 2.21a) kasvab vahemikus $(-\infty; 0)$ ja kahaneb vahemikus $(0; \infty)$. Seega $X\uparrow = (-\infty; 0)$ ja $X\downarrow = (0; \infty)$.



Joon. 2.21

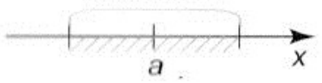
Näide 3.

Funktsioon $y = -\frac{2}{3}x + 2$ on kogu oma määramispiirkonnas kahanev (joon. 2.21b). Seega $X\uparrow = \varnothing$, $X\downarrow = X$ ehk $X\downarrow = (-\infty; \infty)$.

Funktsioone, mille kasvamisvahemik ühtib määramispiirkonnaga, nimetatakse kasvavateks funktsioonideks.

Funktsioone, mille kahanemisvahemik ühtib määramispiirkonnaga, nimetatakse kahanevateks funktsioonideks.

Vaatleme veel funktsiooni graafikul neid kohti, kus funktsiooni kasvamine asendub kahanemisega või vastupidi. Näiteks joonisel 2.20 on nendeks argumendi väärtused –0,5; 2,5; 6 ja 8. Näeme, et kohal, kus kasvamine asendub kahanemisega, on funktsioonil suurim väärtus, võrreldes naaberväärtustega. Kohal, kus kahanemine asendub kasvamisega, on funktsioonil vähim väärtus, võrreldes naaberväärtustega. Need väärtused ei tarvitse olla funktsiooni suurimad või vähimad väärtused funktsiooni kogu määramispiirkonna ulatuses, vaid argumendi vastava väärtuse ümbruses. Koha a **ümbruse** all mõistame iga vahemikku, mis sisaldab vaadeldavat kohta a (joon. 2.22). Näiteks koha $x_0 = 3$ ümbruseks võib olla vahemik (2; 4), aga ka (2,5; 3,5).



Joon. 2.22

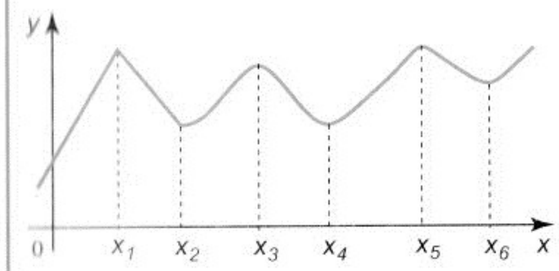
Kohal x_0 on funktsioonil $y = f(x)$ maksimum, kui kõigi argumendi x väärtuste korral koha x_0 mingist ümbrusest kehtib võrratus $f(x_0) \geq f(x)$.
Kohal x_0 on funktsioonil $y = f(x)$ miinimum, kui kõigi argumendi x väärtuste korral koha x_0 mingist ümbrusest kehtib võrratus $f(x_0) \leq f(x)$.

Funktsiooni maksimumkohti ja miinimumkohti nimetatakse ühise nimega funktsiooni **ekstreemumkohtadeks**. Funktsiooni ekstreemumkohtade hulka tähistatakse sümboliga X_e. Funktsiooni väärtust ekstreemumkohas nimetatakse funktsiooni **ekstreemumiks**.[1]

Näiteks joonisel 2.20 esitatud funktsioonil on maksimum kohal $x = -0{,}5$ ja kohal $x = 6$; miinimum on kohal $x = 2{,}5$ ja kohal $x = 8$. Näites 3 esitatud lineaarfunktsioonil $y = -\frac{2}{3}x + 2$ ekstreemumkohad puuduvad.

Näide 4.

Joonisel 2.23 esitatud funktsioonil on kuus ekstreemumkohta, kusjuures maksimumid on kohtadel x_1, x_3 ja x_5, miinimumid on kohtadel x_2, x_4 ja x_6.



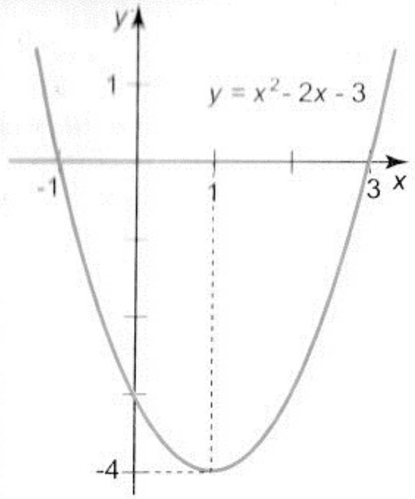
Joon. 2.23

Näide 5.

Uurime funktsiooni $y = x^2 - 2x - 3$. Selleks joonestame funktsiooni graafiku. Graafikuks on parabool, mille nullkohad on $x_1 = 3$ ja $x_2 = -1$. Paraboli haripunkt on kohal $x_h = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$, haripunkti ordinaat $y_h = 1^2 - 2 - 3 = -4$ (joon. 2.24). Jooniselt näeme, et funktsioon kahaneb, kui $x < 1$, ja kasvab, kui $x > 1$. Kohal $x = 1$ on funktsioonil miinimum ja see on –4. Seega vaadeldava funktsiooni muutumispiirkond $Y = [-4; \infty)$. Kirjutame välja funktsiooni kõik omadused, millega oleme seni tutvunud:

$X = (-\infty; \infty)$, $Y = [-4; \infty)$, $X_0 = \{-1; 3\}$, $X^+ = (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$,
$X^- = (-1; 3)$, $X\uparrow = (1; \infty)$, $X\downarrow = (-\infty; 1)$, $x_{min} = 1$.

[1] Ladina keeles *extrēmum* – äärmus.



Joon. 2.24

Märkus.

Funktsiooni graafiku põhjal funktsiooni omadusi uurida võimaldavad ka mitmed arvutiprogrammid (Study Works, Derive, Win Funktion jne.), kasutada saab ka graafilist taskuarvutit (TI-82, TI-83 jne.). Üldjuhul tuleb nende kasutamisel alati läbida järgmised sammud:

a) sisestada vastavalt kasutatava tarkvara reeglitele vaadeldava funktsiooni valem;

b) joonestada funktsiooni graafik, tavaliselt käsu GRAPH abil;

c) valida koordinaattelgedel selline ühiku pikkus ja vaadeldav lõik, et otsitav graafik (või selle osa) oleks ekraanil võimalikult hästi nähtav. Tavaliselt kasutatakse käske ZOOM, RANGE, BOX;

d) kasutades võimalust liikuda punktiga (kursoriga) mööda graafikut, leida vajalikud omadused, tavaliselt kasutatakse käsku TRACE.

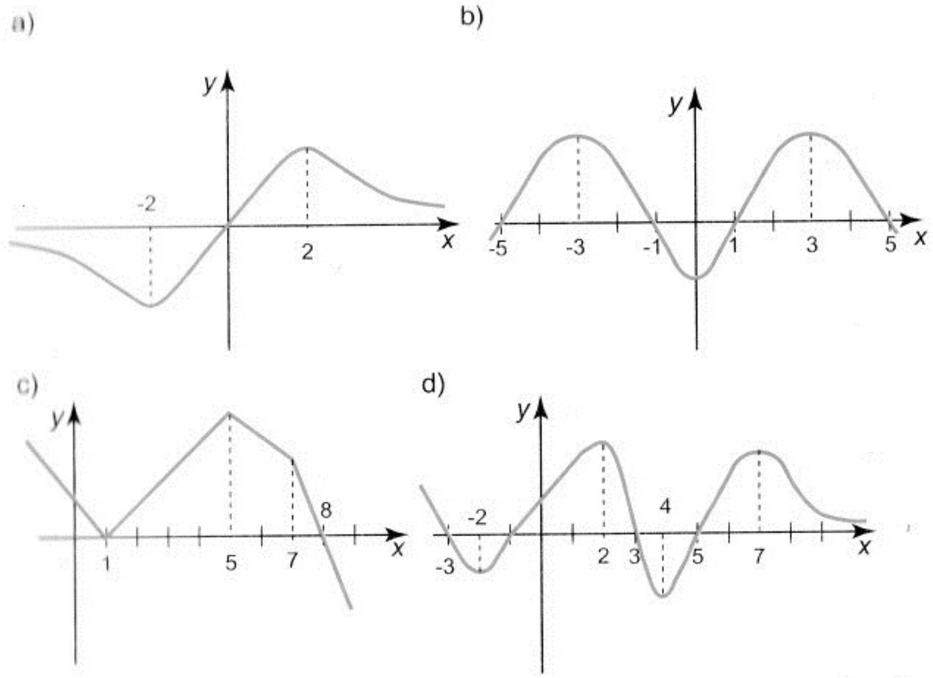
Arvutit kasutades leidke järgmiste funktsioonide nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, kasvamis- ja kahanemisvahemikud ning ekstreemumkohad:

1) $y = x^3 - 2x^2$; 2) $y = -2x^3 - 3x^2 + x$; 3) $y = x^3 + x - 6$.

Funktsiooni graafikult saadud tulemused funktsiooni omaduste kohta võivad olla mõnevõrra ebatäpsed. Täpsemaid meetodeid funktsiooni uurimiseks vaatleme õpiku 5. peatükis.

A

212. Leidke funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud ning ekstreemumkohad (joon. 2.25). Määrake ekstreemumi liik.



Joon. 2.25

213. Leidke funktsiooni graafiku abil kasvamis- ja kahanemisvahemikud ning ekstreemumkohad.

1) $y = 2x + 7$; 2) $y = -4x + 1$; 3) $y = 4 - x$;
4) $y = 3x - 6$; 5) $y = x^2 - 5x$; 6) $y = 4 + 3x - x^2$;
7) $y = -(x - 1)(x - 7)$; 8) $y = x^2 + 2x + 10$; 9) $y = \frac{3}{x}$; 10) $y = -\frac{5}{x}$.

Missugused funktsioonidest on kasvavad, missugused kahanevad? Missugustel tingimustel on lineaarfunktsioon $y = ax + b$ kasvav, missugustel kahanev?

214. Uurige funktsiooni graafiku abil (X, Y, X_0, X^+, X^-, X_e, $X\uparrow$, $X\downarrow$).

1) $y = -2x + 1$; 2) $y = 3x + 3$; 3) $y = x + 5$;
4) $y = -0{,}4x - 0{,}3$; 5) $y = |x - 2|$; 6) $y = |2x - 5|$;
7) $y = |4 - 3x| + 2$; 8) $y = |1 - 2x| - 2x$; 9) $y = x^2 + x - 2$;
10) $y = -5x^2 + 4x + 1$; 11) $y = 10 - x^2$; 12) $y = x^2 + 7x$.

215. Joonestage funktsiooni graafik järgmiste andmete põhjal.

1) $X = R$, $X^+ = (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$, $X^- = (1; 4)$,
$x_{min} = 2{,}5$, $X\uparrow = (2{,}5; \infty)$, $X\downarrow = (-\infty; 2{,}5)$, $f(2{,}5) = -2{,}25$;
2) $X = R$, $X_0 = \{0; 6\}$, $X^+ = (-\infty; 0) \cup (0; 6)$, $X^- = (6; \infty)$,
$X\uparrow = (0; 3)$, $X_1\downarrow = (-\infty; 0)$, $X_2\downarrow = (3; \infty)$, $X_e = \{0; 3\}$,
$f(0) = 0$, $f(3) = 8$.

B

216. Joonestage arvuti või graafilise taskuarvuti abil erinevaid funktsiooni $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ graafikuid, andes vabalt kordajatele a, b, c ja d erinevaid väärtusi. Muutes kordajate väärtusi ($a \neq 0$), leidke valem funktsioonile, mis

1) omab vaid ühte nullkohta;
2) omab kahte erinevat nullkohta;
3) omab kolme erinevat nullkohta;
4) on kogu määramispiirkonnas kasvav;
5) on kogu määramispiirkonnas kahanev;
6) omab kahte kahanemisvahemikku.

217. Uurige funktsiooni tema graafiku abil.

1) $y = |x^2 - 3x + 2|$;
2) $y = |2x^2 - 3x - 5|$;
3) $y = x^2 - |11x - 28|$;
4) $y = x^2 + |13x + 30|$;
5) $y = \begin{cases} 2x^2 + x - 3, \text{ kui } x \le 0 \\ -x^2 + x - 3, \text{ kui } x > 0 \end{cases}$;
6) $y = \begin{cases} x^2 - x, \text{ kui } x < 1 \\ 1 - x, \text{ kui } x \ge 1 \end{cases}$.

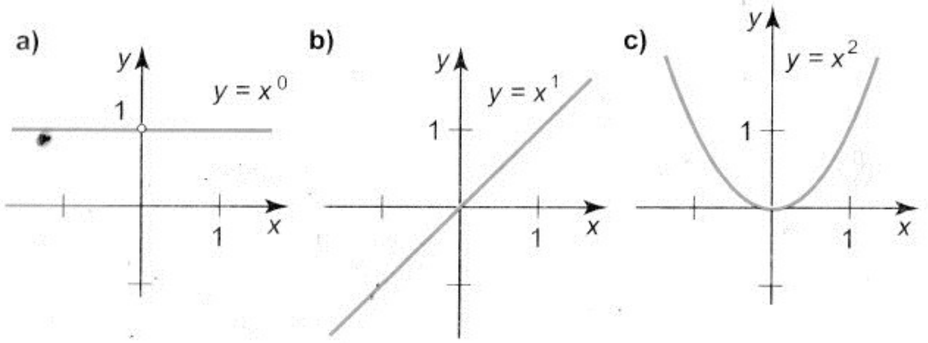
2.6. ASTMEFUNKTSIOONID

Astmefunktsioonideks nimetatakse funktsioone, mida esitab valem $y = x^a$, kus $a \in \mathbf{R}$.

Astendaja a on naturaalarv

Kuna naturaalarvulisse astmesse on võimalik tõsta mistahes reaalarvu, siis on y väärtus arvutatav iga x korral. See tähendab, et kui $a \in \mathbf{N}$ ja $a \neq 0$, siis on funktsiooni $y = x^a$ määramispiirkonnaks kogu reaalarvude hulk **R**. Mõnda naturaalarvulise astendajaga astmefunktsiooni me juba tunneme.

Kui $a = 0$, saame funktsiooni $y = x^0$, mis on määratud iga $x \neq 0$ korral. Kui $x \neq 0$, siis $x^0 = 1$ ja me saame konstantse funktsiooni, mille graafikuks on x-teljega paralleelne sirge, millel puudub punkt (0; 1) (joon. 2.26a).



Joon. 2.26

Kui $a = 1$, saame funktsiooni $y = x$, ka selle funktsiooni graafikuks on sir (joon. 2.26b).

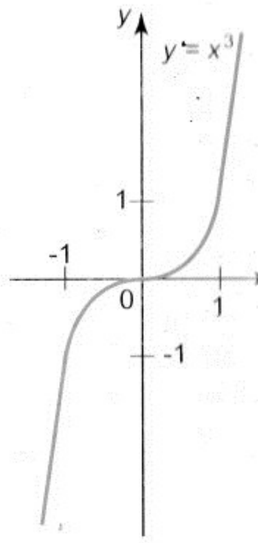
Kui $a = 2$, saame funktsiooni $y = x^2$, selle graafikuks on parabo (joon. 2.26c).

1. Funktsioon $y = x^3$ ehk kuupfunktsioon

Nagu öeldud, on selle funktsiooni määramispiirkonnaks kogu reaalarvude hulk **R**. Teame, et negatiivse arvu kuup on negatiivne arv, positiivse arvu kuup positiivne arv ja $0^3 = 0$. Mida suurema arvu me kuupi tõstame, seda suurema arvu vastuseks saame. Järelikult on kuupfunktsioon kogu ulatuses kasvav. Graafiku joonestamiseks koostame tabeli:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–27	–8	–1	0	1	8	27

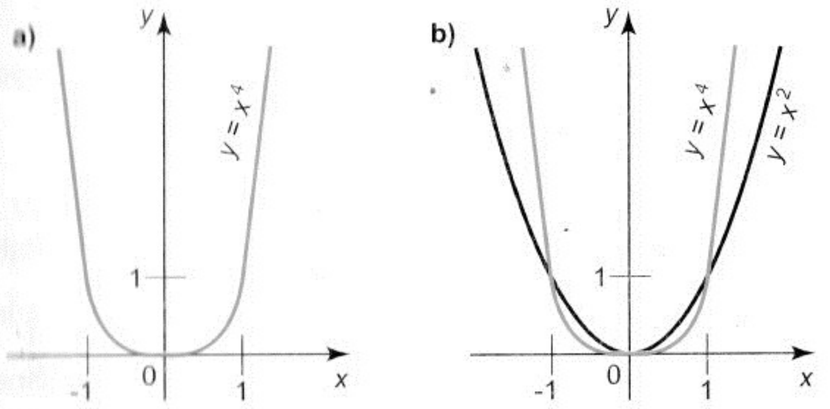
Funktsiooni $y = x^3$ graafik on kujutatud joonisel 2.27, seda graafikut nimetatakse **kuupparabooliks**. Kuupfunktsiooni väärtused kohal x ja kohal $-x$ on absoluutväärtuselt võrdsed, kuid erinevad märgi poolest.



Joon. 2.2

2. Funktsioon $y = x^4$

Teame, et iga arvu ruut, samuti ka neljas aste on mittenegatiivne arv. Järeliku funktsioonil $y = x^4$ puudub negatiivsuspiirkond. Teame, et $(-x)^4 = x^4$. See tähe dab, et funktsiooni väärtused kohal x ja $-x$ on võrdsed. Funktsiooni $y =$ graafikut nimetatakse **neljanda astme parabooliks** (joon. 2.28a). Graafik sümmeetriline y-telje suhtes. Samasugused omadused on ka funktsioonil $y =$ Joonisel 2.28b on koos kujutatud funktsioonide $y = x^2$ ja $y = x^4$ graafikud.



Joon. 2.2

3. Funktsioon $y = x^{2n}$, $n \in Z^+$

Sellisel kujul esitatud funktsioon on astmefunktsioon, mille astendaja on positiivne paarisarv $a = 2n$. Kuna alati $(+x)^{2n} = (-x)^{2n}$, siis on vaadeldavate funktsioonide graafikud sümmeetrilised y-telje suhtes. Kõigil funktsioonidel $y = x^{2n}$, $n \in \mathbf{Z}^+$ on järgmised ühised omadused (joon. 2.29a):

$X = \mathbf{R}$ $\quad X^+ = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ $\quad X\uparrow = (0; \infty)$

$Y = [0; \infty)$ $\quad X^- = \varnothing$ $\quad X\downarrow = (-\infty; 0)$

$X_0 = \{0\}$

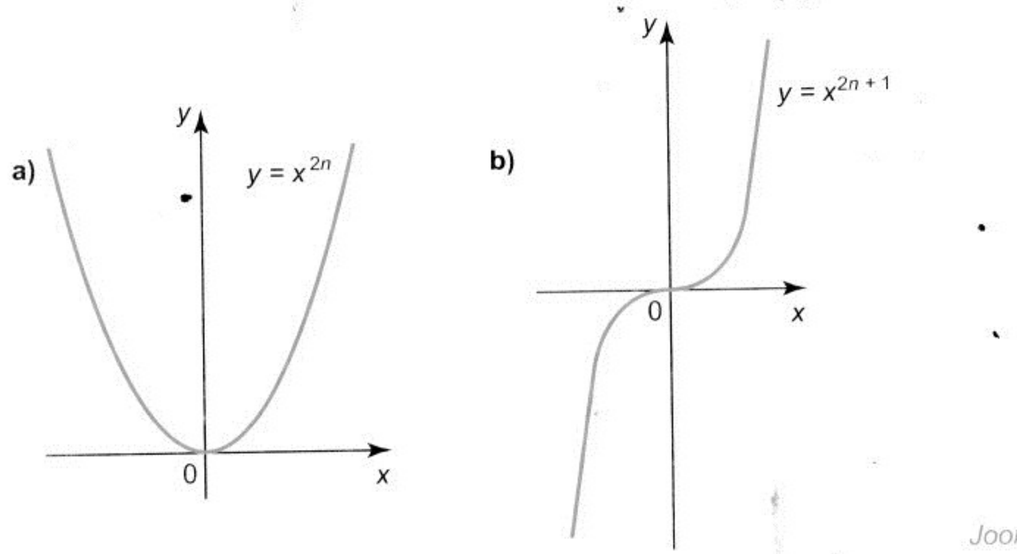
4. Funktsioon $y = x^{2n+1}$, $n \in Z^+$

Need on astmefunktsioonid, kus astendaja on positiivne paaritu arv 3, 5, 7, … . Alati kehtib valem $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$ ning seega vaadeldava funktsiooni väärtused kohtadel x ja $-x$ erinevad ainult märgi poolest. Funktsiooni $y = x^{2n+1}$, $n \in \mathbf{Z}^+$ omadused on järgmised (joon. 2.29b):

$X = \mathbf{R}$ $\quad X^+ = (0; \infty)$ $\quad X\uparrow = (-\infty; \infty)$

$Y = \mathbf{R}$ $\quad X^- = (-\infty; 0)$ $\quad X\downarrow = \varnothing$

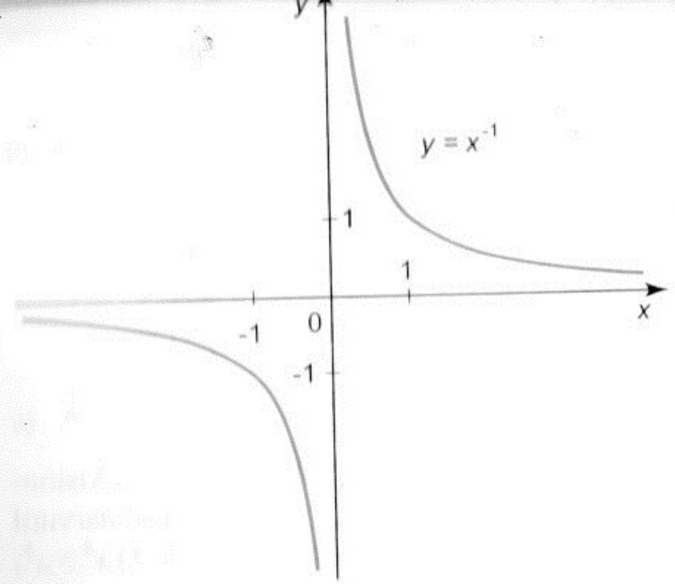
$X_0 = \{0\}$



Joon. 2.29

Astendaja a on negatiivne täisarv

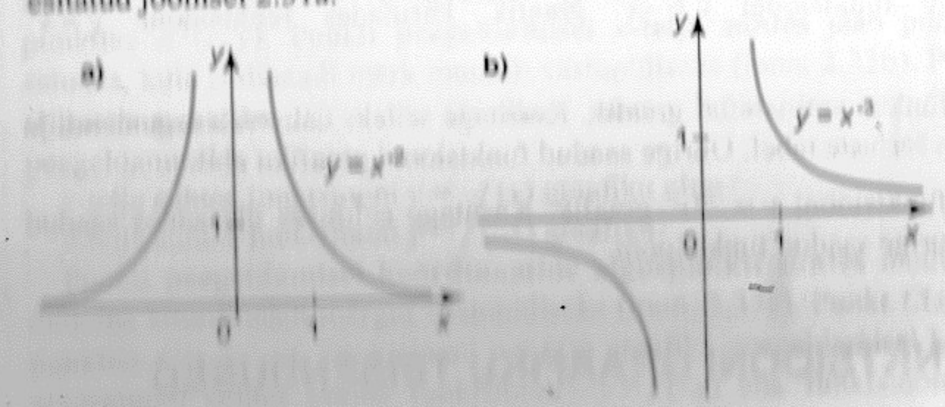
Nende funktsioonide üldkuju on $y = x^{-n}$, kus $n \in \mathbf{Z}^+$. Selliseid funktsioone võib esitada ka kujul $y = \frac{1}{x^n}$. Et nulliga jagada ei saa, ei kuulu arv 0 nende funktsioonide määramispiirkonda ning $X = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Varasemast oleme tuttavad funktsiooniga $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, mille graafik on hüperbool (joon. 2.30).



Joon. 2.30

5. Funktsioon $y = x^{-2}$ ehk $y = \frac{1}{x^2}$

Avaldisest on näha, et funktsioon omandab ainult positiivseid väärtusi. Seega $Y = (0; \infty)$ ja $X^+ = X$. Et $f(-x) = f(x)$, siis on graafik sümmeetriline y-telje suhtes. Kui $x \to 0$, siis $\frac{1}{x^2} \to \infty$. Kui $x \to \infty$ või $x \to -\infty$, siis $\frac{1}{x^2} \to 0$. Graafik on esitatud joonisel 2.31a.



Joon. 2.3

6. Funktsioon $y = x^{-1}$ ehk $y = \frac{1}{x^1}$

Vaadeldav funktsioon omandab negatiivseid väärtusi, kui x on negatiivne, nin positiivseid väärtusi, kui x on positiivne. Funktsiooni väärtused kohtadel x ja erinevad märgi poolest ja on absoluutväärtuselt võrdsed. Kui $x \to 0$ ja $x > 0$, si $\frac{1}{x^1} \to \infty$. Kui $x \to 0$ ja $x < 0$, siis $\frac{1}{x^1} \to -\infty$. Kui $x \to \infty$ või $x \to -\infty$, si $\frac{1}{x^1} \to 0$. Funktsiooni graafik on joonisel 2.31b.

A

218. Leidke punktid, mida läbivad kõik astmefunktsioonide graafikud.

219. Võrrelge vastava funktsiooni graafiku abil astmeid.

1) $0{,}5^3$ 7^3; 2) $0{,}9^4$ $(-5)^4$; 3) $(-1{,}5)^3$ $1{,}4^3$;
4) $1{,}3^7$ $2{,}4^7$; 5) $(-6)^5$ $(-4)^5$; 6) $(-6)^4$ $(-4)^4$.

220. Uurige funktsiooni.

1) $y = x^1$; 2) $y = x^{-2}$; 3) $y = x^{-3}$;
4) $y = x^4$; 5) $y = x^{-2n}$, $n \in \mathbf{Z}^+$; 6) $y = x^{-(2n+1)}$, $n \in \mathbf{Z}^+$.

221. Joonestage millimeetripaberile samasse teljestikku (1 ühik = 1 dm) funktsioonide $y = x^4$ ja $y = x^6$ graafikud. Selleks leidke funktsiooni väärtused taskuarvutil iga 0,1 ühiku järel. Missuguste x väärtuste korral kehtib võrratus 1) $x^4 > x^6$; 2) $x^4 < x^6$? Kuidas asetseks samas teljestikus funktsiooni $y = x^8$ graafik?

222. Joonestage millimeetripaberile samasse teljestikku (1 ühik = 1 dm) funktsioonide $y = x^3$ ja $y = x^5$ graafikud. Missuguste argaumendi väärtuste korral kehtib võrratus 1) $x^3 > x^5$; 2) $x^3 < x^5$? Kuidas asetseks samas teljestikus funktsiooni $y = x^7$ graafik?

223. 1. Kuidas saadakse funktsiooni $y = x^2$ graafikust funktsiooni $y = -x^2$ graafik?
2. Joonestage funktsiooni $y = -x^4$ graafik, kasutades funktsiooni $y = x^4$ graafikut.
3. Joonestage funktsiooni $y = -x^3$ graafik, kasutades funktsiooni $y = x^3$ graafikut.

224. Joonestage funktsiooni $y = 2x^3$ graafik. Koostage selleks eelnevalt argumendi ja funktsiooni väärtuste tabel. Uurige saadud funktsiooni graafiku abil.

225. Joonestage funktsiooni $y = -2x^3$ graafik. Kasutage eelmises ülesandes saadud graafikut. Uurige saadud funktsiooni.

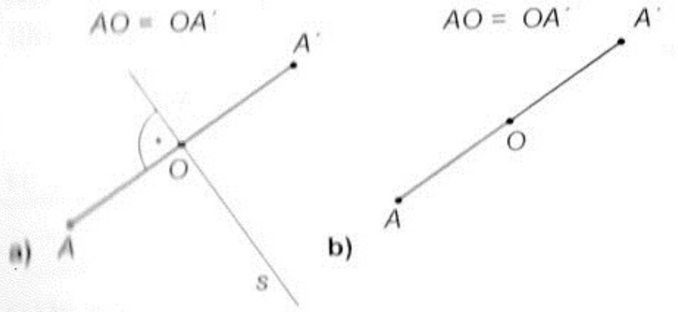
2.7. * FUNKTSIOONI GRAAFIKU TEISENDUSED

Eespool vaadeldud astmefunktsioone on võimalik kasutada teiste, keerulisemate funktsioonide graafikute joonestamisel ja uurimisel. Vaatleme järgnevas mõningaid võimalusi.

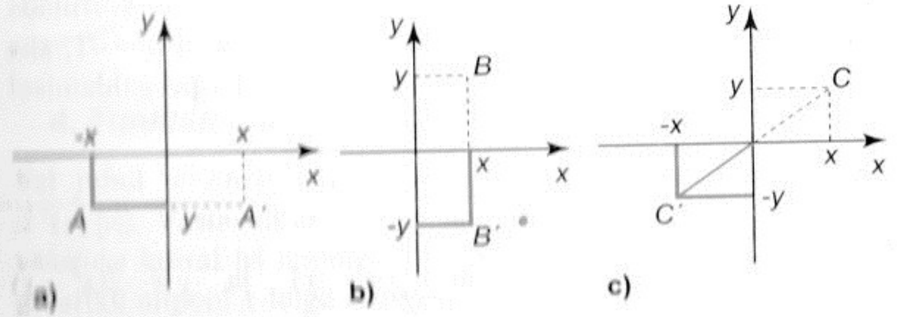
1. Graafiku peegeldus telgede ja koordinaatide alguspunkti suhtes.

Kujundi **peegelduseks sirge s suhtes** nimetatakse teisendust, mille puhul kujundi iga punkt A ja selle kujutis A' on sümmeetrilised sirge s suhtes, s.t. $AO = OA'$ *ja* $AA' \perp s$ (joon. 2.32a).

Kujundi **peegelduseks punkti O suhtes** nimetatakse teisendust, mille korral kujundi iga punkt B ja selle kujutis B' on sümmeetrilised punkti O suhtes, s.t. punktid B, O ja B' asuvad ühel sirgel ning $BO = OB'$ (joon. 2.32b).



Joon. 2.32



Joon. 2.33

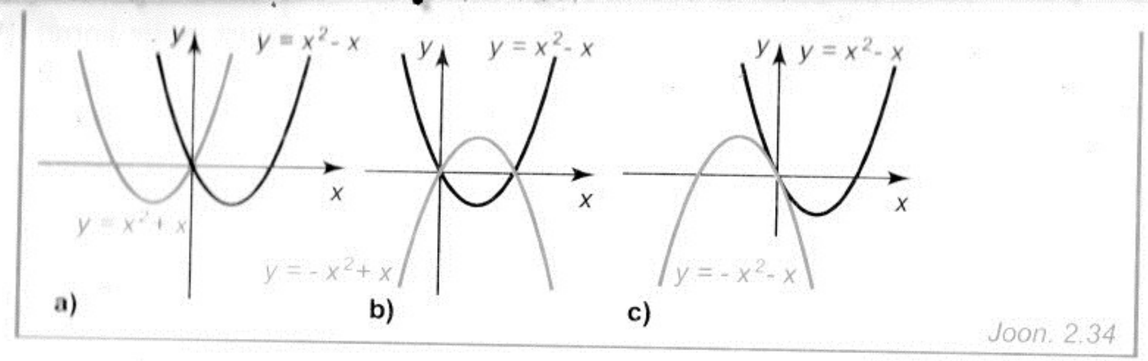
Punkti **peegeldamisel y-telje suhtes** jääb punkti ordinaat samaks, kuid punkti abstsissi märk muutub vastupidiseks (joon. 2.33a). Punkt $A(-x; y)$ teiseneb punktiks $A'(x; y)$. Punkti **peegeldamisel x-telje suhtes** jääb punkti abstsiss samaks, kuid ordinaadi märk muutub vastupidiseks (joon. 2.33b). Punkt $B(x; y)$ teiseneb punktiks $B'(x; -y)$. Järelikult saame funktsiooni $y = f(x)$ graafiku peegeldamisel

x-telje suhtes funktsiooni $y = -f(x)$ graafiku ning
y-telje suhtes funktsiooni $y = f(-x)$ graafiku.

Punkti **peegeldamisel koordinaatide alguspunkti suhtes** muutuvad punkti mõlema koordinaadi märgid vastupidiseks (joon. 2.33c). Punkt $C(x; y)$ teiseneb punktiks $C'(-x; -y)$. Funktsiooni $y = f(x)$ graafiku peegeldamisel koordinaatide alguspunkti suhtes saame funktsiooni $-y = f(-x)$ ehk funktsiooni $y = -f(-x)$ graafiku.

Näide 1.

Peegeldame funktsiooni $y = x^3 - x$ graafikut koordinaattelgede ja koordinaatide alguspunkti suhtes. Peegeldamisel y-telje suhtes saame funktsiooni $y = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x$ (joon. 2.34a), peegeldamisel x-telje suhtes funktsiooni $-y = x^3 - x$ ehk $y = -x^3 + x$ (joon. 2.34b) ja peegeldamisel koordinaatide alguspunkti suhtes saame funktsiooni $-y = (-x)^3 - (-x)$ ehk $y = -x^3 + x$ graafiku (joon. 2.34c).



Joon. 2.34

2. Funktsiooni y = af(x) graafik

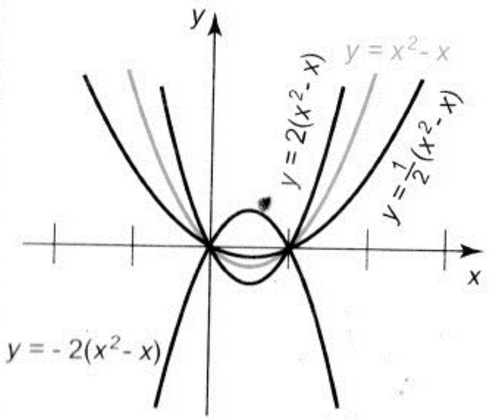
Olgu antud funktsiooni $y = f(x)$ graafik. Et joonestada funktsiooni $y = af(x)$ graafikut, tuleb funktsiooni $y = f(x)$ graafiku iga punkti ordinaati korrutada arvuga a. Graafiku punkt $A(x; y)$ teiseneb punktiks $A'(x; ay)$. Kui $a = -1$, siis saame otsitava funktsiooni graafiku esialgse funktsiooni graafiku peegeldamisel x-telje suhtes.

Näide 2.

Joonestame funktsioonide $y = 2(x^2 - x)$, $y = \frac{1}{2}(x^2 - x)$ ja $y = -2(x^2 - x)$ graafikud, kasutades funktsiooni $y = x^2 - x$ graafikut. Selleks koostame tabeli.

x	–2	–1	0	0,5	1	2
$f(x) = x^2 - x$	6	2	0	–0,25	0	2
$2f(x)$	12	4	0	–0,5	0	4
$-2f(x)$	–12	–4	0	0,5	0	–4
$\frac{1}{2}f(x)$	3	1	0	–0,125	0	1

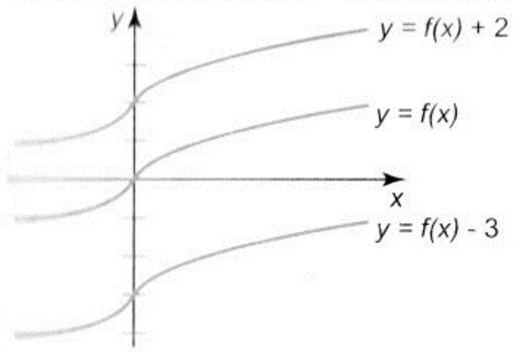
Vastavate funktsioonide graafikud on esitatud joonisel 2.35.



Joon. 2.35

3. Funktsiooni y = f (x) + a graafik

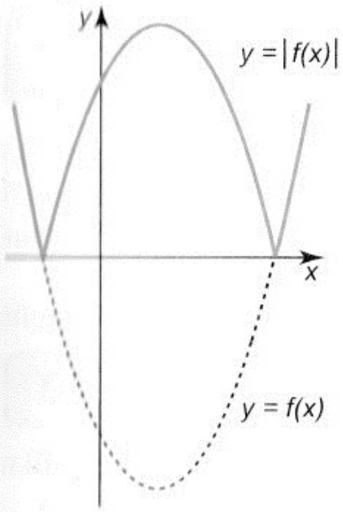
Sel juhul teiseneb funktsiooni graafiku iga punkt $A(x; y)$ punktiks $A'(x; y + a)$. See tähendab, et graafikut tuleb nihutada a ühikut ülespoole, kui $a > 0$ ja $|a|$ ühikut allapoole, kui $a < 0$ (joon. 2.36).



Joon. 2.36

4. Funktsiooni y = |f (x)| graafik

Sel juhul teiseneb funktsiooni $y = f(x)$ graafiku iga punkt $A(x; y)$ punktiks $A'(x; |y|)$. Vastavalt arvu absoluutväärtuse definitsioonile tuleb iga negatiivse y väärtuse korral $|y|$ leidmiseks võtta y vastandarv. Selle tulemusena peegeldub graafiku allpool x-telge asuv osa x-teljest, ülalpool olev osa jääb samaks (joon. 2.37).

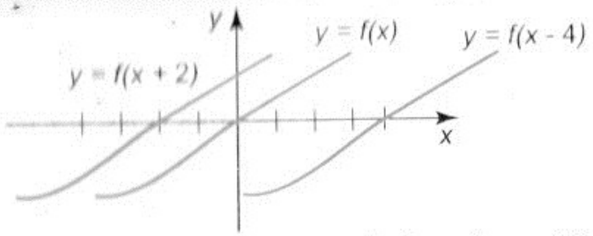


Joon. 2.37

5. Funktsiooni y = f (x – a) graafik

220. 1. Joonestage samasse teljestikku funktsioonide $y = 2x^2$ ja $y = 2(x - 3)^2$ graafikud. Selleks täitke eelnevalt järgmine tabel.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$2x^2$								
$2(x - 3)^2$								



Joon. 2.38

2. Võrrelge argumente, mille korral on mõlema funktsiooni väärtused võrdsed.
3. Kuidas tuleks funktsiooni $y = 2x^2$ graafikut teisendada, et saada funktsiooni $y = 2(x - 3)^2$ graafik?

Funktsiooni $y = f(x - a)$ graafiku saamiseks tuleb funktsiooni $y = f(x)$ graafikut nihutada a ühikut paremale, kui $a > 0$, ja $|a|$ ühikut vasakule, kui $a < 0$ (joon. 2.38).

227. Leidke punkt, mis saadakse punkti $A(-2; 1)$ peegeldamisel

1) x-telje suhtes ja seejärel y-telje suhtes;
2) y-telje suhtes ja seejärel x-telje suhtes;
3) koordinaatide alguspunkti suhtes.

Mida järeldate? Kas tulemus kehtib iga punkti $B(x; y)$ korral?

228. Peegeldage funktsiooni graafikut y-telje suhtes. Missuguse valem esitab saadud funktsiooni?

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = -2x^2 + 4$; 3) $y = x^2 + 3$;
4) $y = -x^2 - x + 6$; 5) $y = x^3$; 6) $y = x^4$.

Missugustel juhtudel saame peegeldamise tulemusena sama funktsiooni?

229. Peegeldage funktsiooni graafikut koordinaatide alguspunkti suhtes. Missuguse valemiga esitab saadud funktsioon?

1) $y = 5x$; 2) $y = 4 - 3x$; 3) $y = x^2 - 2x + 1$;
4) $y = (x - 3)^2 + 1$; 5) $y = 2x^3$; 6) $y = x^4 - 5$.

Missugustel juhtudel saame peegelduse tulemusena sama funktsiooni?

230. Kasutades funktsiooni $y = x^3$ graafikut, joonestage funktsiooni graafik.

1) $y = x^3 - 1$; 2) $y = (x + 1)^3$; 3) $y = 2x^3$;
4) $y = 2x^3 - 3$; 5) $y = -(x + 2)^3$; 6) $y = |x^3|$.

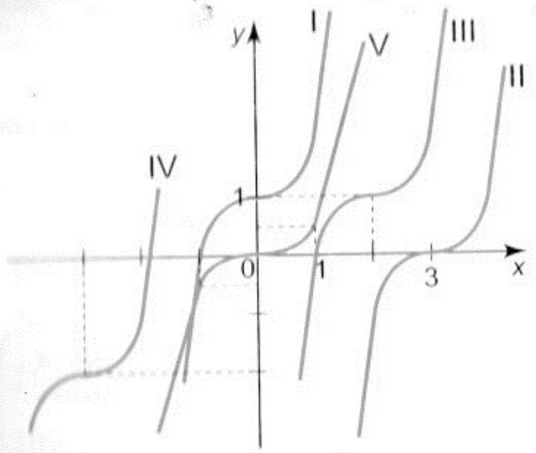
231. Joonisel 2.39 esitatud graafikud on saadud funktsiooni $y = x^3$ graafiku teisendamisel. Leidke saadud kuupparaboolide võrrandid.

232. Skitseerige funktsiooni graafik. Leidke funktsiooni maksimum- või miinimumkoht.

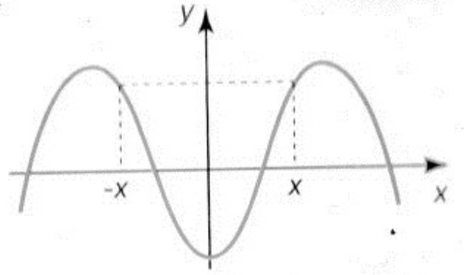
1) $y = (x - 3)^4 + 1$; 2) $y = 2x^3 - 3$;
3) $y = 0{,}5(x - 1)^5$; 4) $y = -4(x + 2)^4 - 1$;
5) $y = -0{,}5(x + 1)^3 - 0{,}5$; 6) $y = 3(x - 4)^6 + 2$.

233. Kasutades vastavate funktsioonide graafikuid leidke, millal

1) $(x + 1)^2 > (x + 1)^3$; 2) $(x + 1)^2 < (x + 1)^3$; 3) $(x + 1)^2 = (x + 1)^3$.



Joon. 2.39



Joon 2.40

2.8. PAARISFUNKTSIOON. PAARITU FUNKTSIOON

Eelnevas nägime, et mitmetel funktsioonidel on ühine omadus: nende graafikud on sümmeetrilised y-telje suhtes ning nende graafiku peegeldamisel y-telje suhtes saame sellesama graafiku. Sellise omadusega funktsioone nimetatakse paarisfunktsioonideks.

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse paarisfunktsiooniks, kui iga x korral funktsiooni määramispiirkonnast kehtib võrdus $f(-x) = f(x)$.

Muidugi peab koos iga x-ga kuuluma funktsiooni määramispiirkonda ka $-x$ ehk funktsiooni määramispiirkond peab olema sümmeetriline x-telje 0-punkti suhtes.

Veendume, et selliselt defineeritud paarisfunktsiooni graafik on tõepoolest sümmeetriline y-telje suhtes.

Teoreem 1. Paarisfunktsiooni graafik on sümmeetriline y-telje suhtes.

Tõestus.
Eeldame, et funktsioon f on paarisfunktsioon s.t. iga $x \in X$ korral $f(x) = f(-x)$. Meil tuleb näidata, et kui mingi punkt P asub funktsiooni f graafikul, siis asub sellel graafikul ka punkt P', mis on punktiga P sümmeetriline y-telje suhtes (joon. 2.40). Olgu $P(x; y)$ funktsiooni graafiku mingi punkt. Selle punkti ordinaat $y = f(x)$. Eelduse kohaselt aga $f(x) = f(-x)$ ja seega ka $y = f(-x)$, s.t. punkt $P'(-x; y)$ asub samuti funktsiooni graafikul. Et aga punktid $P(x; y)$ ja $P'(-x; y)$ on sümmeetrilised y-telje suhtes (vt. joon. 2.33b), on teoreem tõestatud.

Näide 1.

Kontrollime, kas funktsioonid $y = 4x^2$ ja $y = 2x^4 - x + 2$ on paarisfunktsioonid. Selleks leiame $f(x)$ ja $f(-x)$: esimesel juhul $f(x) = 4x^2$, $f(-x) = 4(-x)^2 = 4x^2$ ja $f(x) = f(-x)$; teisel juhul $f(x) = 2x^4 - x + 2$, $f(-x) = 2(-x)^4 - (-x) + 2 = 2x^4 + x + 2$ ning $f(x) \neq f(-x)$.

Seega funktsioon $y = 4x^2$ on paarisfunktsioon, kuid $y = 2x^4 - x + 2$ ei ole.

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse paarituks funktsiooniks, kui iga x korral selle funktsiooni määramispiirkonnast kehtib võrdus $f(-x) = -f(x)$.

Ka siin peab funktsiooni määramispiirkond olema sümmeetriline x-telje 0-punkti suhtes.

Võrdusest $f(-x) = -f(x)$ nähtub, et paaritu funktsiooni väärtused kohtadel x ja $-x$ erinevad ainult märgi poolest.

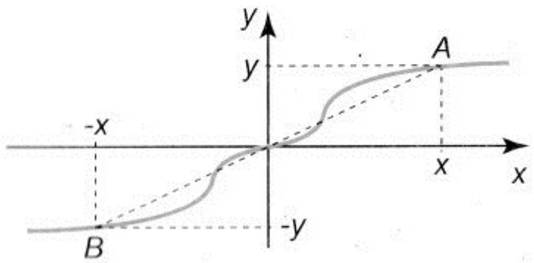
Näide 2.

Kontrollime, kas funktsioonid $y = 2x^4 - x + 2$ ja $y = x^3 - x$ on paaritud funktsioonid. Selleks leiame $f(-x)$ ja $-f(x)$: esimesel juhul $f(-x) = 2x^4 + x + 2$, $-f(x) = -(2x^4 - x + 2) = -2x^4 + x - 2$ ning $f(-x) \neq -f(x)$; teisel juhul $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x$, $-f(x) = -(x^3 - x) = -x^3 + x$ ning $f(-x) = -f(x)$.

Järelikult funktsioon $y = 2x^4 - x + 2$ ei ole paaritu, kuid funktsioon $y = x^3 - x$ on.

Uurime paaritu funktsiooni graafiku sümmeetriat. Olgu meil antud paaritu funktsioon $y = f(x)$. Valime selle graafikul mingi punkti $A(x; f(x))$. Vaatleme graafikul teist punkti B, mille abstsiss on $-x$, seega punkti $B(-x; f(-x))$. Et tegemist on paaritu funktsiooniga, siis $f(-x) = -f(x)$ ja järelikult $B(-x; -f(x))$. Saime, et punktide A ja B mõlemad koordinaadid erinevad teineteisest ainult märgi poolest. Nagu teame, on sellised punktid sümmeetrilised koordinaatide alguspunkti suhtes (joon. 2.41).

Seega oleme tõestanud järgmise teoreemi.



Joon. 2.41

Teoreem 2. **Paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.**

A

234. Kuidas saab lihtsustada paaritu ja paarisfunktsiooni graafiku joonestamist?

235. Kontrollige, missugused järgmistest funktsioonidest on paarisfunktsioonid või paaritud funktsioonid.

1) $y = x^2 + 5x$; 2) $y = -x^2 + 2$; 3) $y = x^2 + 2x - 3$;
4) $y = 5x - 2$; 5) $y = x^4 + 2x^2$; 6) $y = x^3 - 5x + 3$;
7) $y = x + \frac{1}{x}$; 8) $y = \frac{2x^5}{3x^3 + x}$; 9) $y = \frac{3}{x^2 - 5}$;
10) $y = x^4 + x^2 - 3x$; 11) $y = x^3 + x^{-1}$; 12) $y = 3x^4 + x^2 + 4$.

236. Missugused artiklis 2.6 vaadeldud astmefunktsioonidest on paaritud või paarisfunktsioonid?

B

237. Tõestage, et kahe paarisfunktsiooni $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ summa, vahe, korrutis ja jagatis on samuti paarisfunktsioonid.

238. Tõestage, et kahe paaritu funktsiooni summa ja vahe on samuti paaritud funktsioonid.

239. Uurige, kas kahe paaritu funktsiooni korrutis ja jagatis on paarisfunktsioonid, paaritud funktsioonid või pole kumbki nendest.

240. On teada, et funktsioon $y = f(x)$ on paarisfunktsioon. Missugused järgmistest funktsioonidest on samuti paarisfunktsioonid?

1) $y = x^2 f(x)$; 2) $y = xf(x)$; 3) $y = x^2 + f(x)$;
4) $y = x^3 f(x) - 10$; 5) $y = xf(x) + x$; 6) $y = x^2 - 5f(x)$.

241. On teada, et funktsioon $y = f(x)$ on paaritu funktsioon. Missugused järgmistest funktsioonidest on samuti paaritud funktsioonid?

1) $y = xf(x)$; 2) $y = x^2 f(x)$; 3) $y = f(x) + x$;
4) $y = x^2 + f(x)$; 5) $y = 3f(x) - x^3$; 6) $y = xf(x) + 10$.

2.9. PÖÖRDFUNKTSIOON

Kui hulgal X on määratud funktsioon, siis vastab hulga X igale elemendile üks kindel element teisest hulgast Y.

Näide 1.

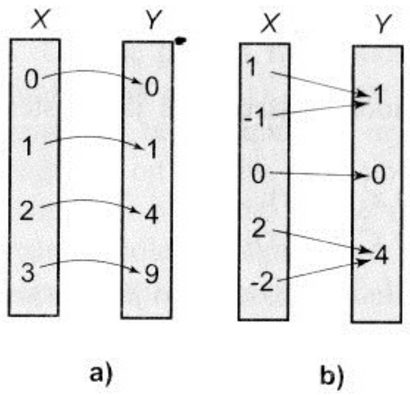
Olgu hulk X Eesti Vabariigi kodanike hulk ja hulk Y nendele vastavate isikukoodide hulk. Sel juhul on hulgal X määratud funktsioon, kuna igale EV kodanikule vastab üks kindla eeskirja järgi määratud isikukood. On olemas ka ühene pöördvastavus: igale isikukoodile vastab üks kindel isik. See tähendab, et ka hulgal Y on määratud funktsioon.

Näide 2.

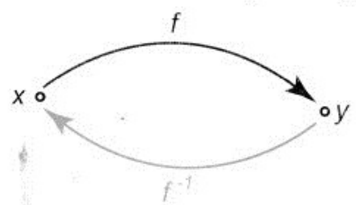
Olgu hulk X teie kooli õpilaste hulk ja hulk Y nende õpilaste vanuste (aastates) hulk. Hulgal X on määratud funktsioon, sest igale õpilasele vastab üks kindel vanus. Seevastu hulgal Y ei ole funktsioon määratud, sest ühevanuseid õpilasi on koolis mitu. Kui on antud hulga Y element (vanus), siis ei saa me üheselt määrata, missuguse õpilasega on tegemist. Pöördvastavus pole ühene.

Näide 3.

Teame, et igale arvule vastab tema ruut. Kui hulgaks X on *naturaalarvude hulk*, siis on vastavus hulkade X ja Y (arvu ruutude hulk) vahel üksühene, s.t. igale arvule hulgast X vastab üks arv hulgast Y ja vastupidi, igale arvule hulgast Y vastab üks arv hulgast X (joon. 2.42a). Seega ka hulgal Y on määratud funktsioon. Kui aga hulgaks X on *täisarvude hulk*, siis hulgal X on määratud funktsioon, kuid hulgal Y ei ole, sest ühele arvule hulgast Y vastab hulgas X mõnikord kaks erinevat arvu (joon. 2.42b).



Joon. 2.42



Joon. 2.43

Näidete 1–3 põhjal võime öelda, et kui hulgal X on määratud mingi funktsioon, siis on kaks võimalust:

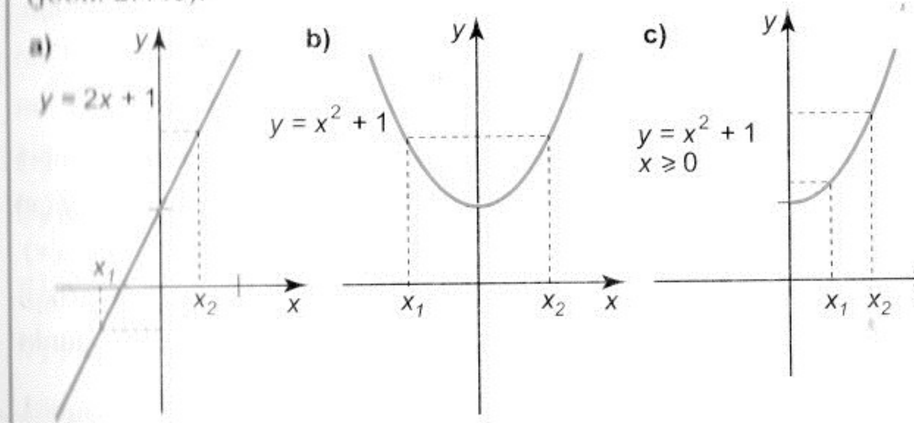
1) hulga Y mõned elemendid vastavad hulga X mitmele elemendile. Siis ei saa sellise $y \in Y$ põhjal üheselt leida, missugune element $x \in X$ temale vastab (näide 2);
2) hulga Y iga element vastab ainult ühele hulga X elemendile ehk hulga X erinevatele elementidele vastavad hulga Y erinevad elemendid. Sel juhul on ka hulgal Y määratud funktsioon (näide 1).

Olgu hulgal X määratud funktsioon $y = f(x)$. Kui selle funktsiooni muutumispiirkonna Y igale elemendile y vastab üks ja ainult üks element x hulgast X nii, et $y = f(x)$, siis on hulgal Y määratud funktsioon, mida nimetatakse esialgse funktsiooni pöördfunktsiooniks.

Funktsiooni $y = f(x)$ pöördfunktsiooni tähistatakse $x = f^{-1}(y)$ (joon. 2.43). Me oleme harjunud aga funktsiooni argumenti tähistama tähega x ja funktsiooni väärtust tähega y, seega funktsiooni f pöördfunktsioon oleks $y = f^{-1}(x)$. Pöördfunktsiooni määramispiirkonnaks on esialgse funktsiooni muutumispiirkond, pöördfunktsiooni muutumispiirkonnaks on esialgse funktsiooni määramispiirkond.

Näide 4.

Funktsioonil $y = 2x + 1$ on pöördfunktsioon, sest igale y väärtusele vastab üks kindel x väärtus (joon. 2.44a). Funktsioonil $y = x^2 + 1$ puudub pöördfunktsioon, sest igale y väärtusele (välja arvatud $y = 1$) vastab kaks erinevat x väärtust (joon. 2.44b). Seevastu funktsioonil $y = x^2 + 1$, kus $X = [0; \infty)$, leidub pöördfunktsioon (joon. 2.44c).



Joon. 2.44

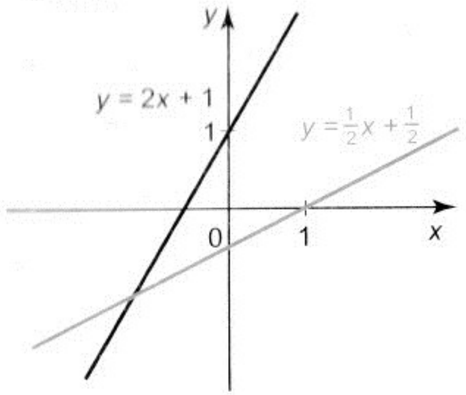
Näide 5.

Leiame funktsiooni $y = 2x + 1$ pöördfunktsiooni. Selleks tuleb meil leida eeskiri, mille järgi saab igale y väärtusele seada vastavusse x väärtuse. Selleks tuleb valemist $y = 2x + 1$ avaldada x:

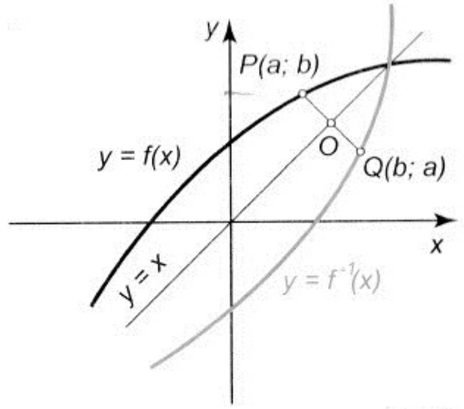
$$2x = y - 1 \text{ ja } x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}.$$

Valem $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ võimaldabki iga y väärtuse jaoks arvutada x väärtust ja esitab seega esialgse funktsiooni pöördfunktsiooni. Tähistades argumendi tähega x ja funktsiooni väärtuse tähega y, saame funktsiooni $f(x) = 2x +$ pöördfunktsiooni $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. Funktsioonide graafikud on joonisel 2.45.

Teoreem. **Funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni graafikud on sümmeetrilised sirge $y = x$ suhtes.**



Joon. 2.45



Joon. 2.46

Tõestus.

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$ ja tema pöördfunktsioon $y = f^{-1}(x)$. Väidame, et igale punktile $P(a; b)$ graafikult $y = f(x)$ vastab funktsiooni $y = f^{-1}(x)$ graafikul punkt P', mis on punktiga P sümmeetriline sirge $y = x$ suhtes (joon. 2.46). Võrdus $y = f^{-1}(x)$ on saadud võrdusest $y = f(x)$ sel teel, et esmalt on avaldatud viimasest võrdusest x ja saadud võrdus $x = f^{-1}(y)$. Seejärel on vahetatud tähised ja saadud funktsioon $y = f^{-1}(x)$. Valime funktsiooni $y = f(x)$ graafikul punkti $P(a; b)$. Selle punkti koordinaadid rahuldavad võrdust $y = f(x)$ ja ka võrdust $x = f^{-1}(y)$. Muutujate vahetamisel saadud võrdust $y = f^{-1}(x)$ rahuldab järelikult arvupaar $(b; a)$. Järelikult, kui esialgse funktsiooni graafikul võtta punkt $P(a; b)$, siis pöördfunktsiooni $y = f^{-1}(x)$ graafikul leidub punkt $Q(b; a)$.

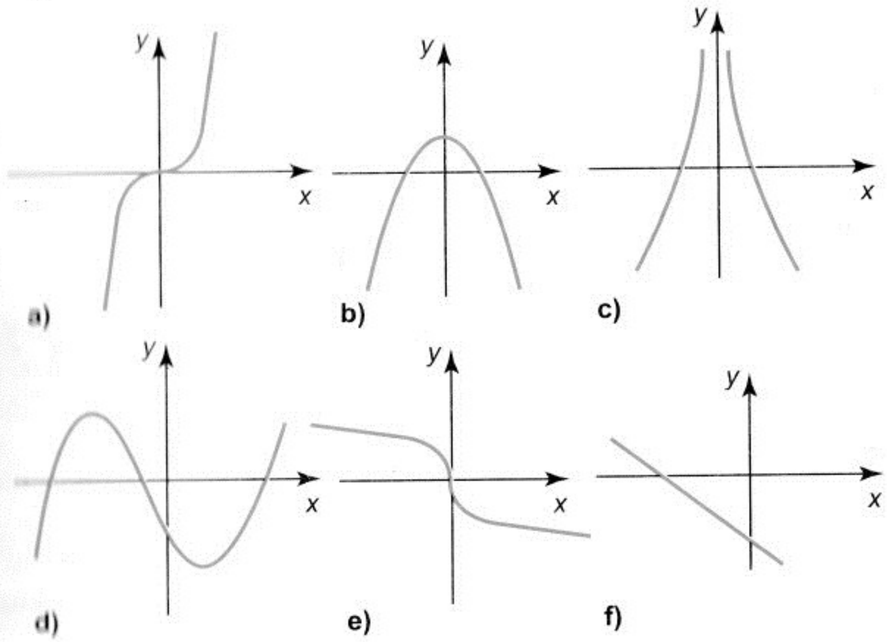
Veendume, et punktid $P(a; b)$ ja $Q(b; a)$ on sümmeetrilised sirge $y = x$ suhtes. Sirge PQ võrrand on $\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-b}{a-b}$ ehk $y = -x + a + b$. Sirged PQ ja $y = x$ on risti, sest nende tõusude korrutis on -1. Lõigu PQ keskpunkti O koordinaadid on $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$, s.t. selle punkti abstsiss ja ordinaat on võrdsed. Sellised punktid rahuldavad sirge $y = x$ võrrandit. Oleme näidanud, et punktid P ja Q on sümmeetrilised sirge $y = x$ suhtes. ■

Igal kasvaval ja igal kahaneval funktsioonil on olemas pöördfunktsioon.

Tõepoolest, kui funktsioon on kogu määramispiirkonnas kasvav, siis vastavad erinevatele x väärtustele erinevad y väärtused ja vastupidi, erinevatele y väärtustele erinevad x väärtused.

A

242. Missugustel graafikutel (joon. 2.47) on kujutatud üksühene vastavus? Missugustel funktsioonidel leidub pöördfunktsioon?



Joon. 2.47

243. Leidke funktsiooni pöördfunktsioon, kui see on olemas.

1) $y = -0{,}5x - 2$; 2) $y = \sqrt{x-1}$; 3) $y = 2x^2, x \le 0$;

4) $y = \frac{1}{3}x - 5$; 5) $y = \frac{x-3}{2}$; 6) $y = x^3 + 1$;

7) $y = x^2 + x$; 8) $y = -8x - 5$; 9) $y = x^2 - 3, x \ge 0$.

244. Joonestage antud funktsiooni pöördfunktsiooni graafik. Leidke antud funktsiooni ning selle pöördfunktsiooni määramis- ja muutumispiirkond.

1) $y = x^2, x \ge 0$; 2) $y = -x + 6$;

3) $y = -x^2 + 4, x \le 0$; 4) $y = x^3$.

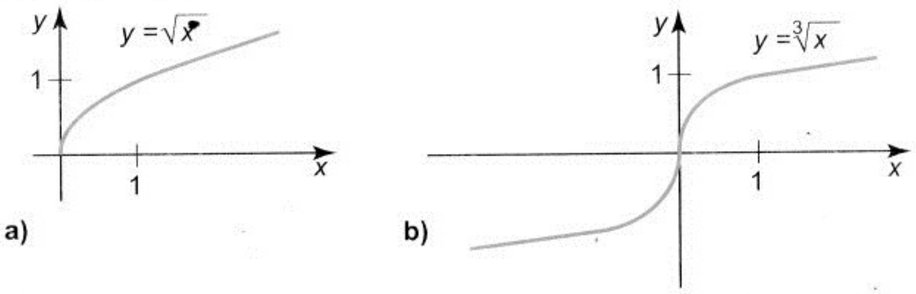
245. Joonestage 3 erinevat kasvava funktsiooni graafikut (igaüks eraldi teljestikku). Peegeldust kasutades joonestage nende pöördfunktsioonide graafikud. Mida võib öelda pöördfunktsioonide kasvamise ja kahanemise kohta?

B

246. 1. Joonestage funktsiooni $y=\dfrac{2}{x-1}$ graafik. Leidke selle funktsiooni määramispiirkond X ja muutumispiirkond Y.
2. Leidke vaadeldava funktsiooni pöördfunktsioon ja joonestage selle graafik.
3. Leidke pöördfunktsiooni määramis- ja muutumispiirkond.

2.10. JUURFUNKTSIOONID

Oleme tutvunud selliste astmefunktsioonidega $y=x^a$, kus astendaja a on täisarv. Järgnevas vaatleme astmefunktsioone, kus astendaja a on ratsionaalarv. Paragrahvis 2.9 nägime, et funktsiooni $y=x^2$ $(x\ge 0)$ pöördfunktsioon on $y=\sqrt{x}$ ehk $y=x^{\frac{1}{2}}$ (joon. 2.48a); funktsiooni $y=x^3$ pöördfunktsioon on $y=\sqrt[3]{x}$ ehk $y=x^{\frac{1}{3}}$ (joon. 2.48b). Need mõlemad pöördfunktsioonid ongi **juurfunktsioonid**. Juurfunktsioonid on sellised astmefunktsioonid, kus astendaja $a=\dfrac{1}{n}$, kus n on 1-st suurem naturaalarv, nende üldkuju on $y=\sqrt[n]{x}$, $n\in\mathbf{N}$, $n>1$.



Joon. 2.48

Analoogiliselt võime defineerida ka teisi astmefunktsioone, mille astendaja on ratsionaalarv, näiteks

$y=x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$, kus $m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$, $n>1$.

A

247. Milliseid tingimusi peavad rahuldama arvud a ja n, et juur $\sqrt[n]{a}$ oleks määratud?

248. Joonestage graafik ja uurige funktsiooni.

1) $y=\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt[3]{x}$; 3) $y=-\sqrt{x}$; 4) $y=-\sqrt[3]{x}$.

249. Skitseerige funktsiooni $y=\sqrt[4]{x}$ graafik, tuginedes funktsiooni $y=x^4$ $(x\ge 0)$ graafikule. Uurige seda funktsiooni.

250. Skitseerige funktsiooni $y=\sqrt[5]{x}$ graafik, tuginedes funktsiooni $y=x^5$ graafikule. Uurige seda funktsiooni.

251. Uurige funktsiooni $y=\sqrt[n]{x}$, kus n on naturaalarv ja $n>1$.

252. Skitseerige funktsiooni graafik.

1) $y=2\sqrt[3]{x}$; 2) $y=\sqrt[3]{x-1}$; 3) $y=-\sqrt{x+2}$;
4) $y=-2\sqrt[4]{x}$; 5) $y=3+\sqrt{x}$; 6) $y=1-\sqrt[3]{x}$.

B

253. Joonestage funktsiooni graafik. Uurige funktsiooni. Graafiku joonestamiseks täitke järgmine tabel.

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	3	4	5
$x^{\frac{m}{n}}$										

1) $y=\sqrt[3]{x^4}$; 2) $y=\sqrt[4]{x^3}$; 3) $y=x^{-\frac{1}{2}}$.

2.11. * LIITFUNKTSIOON

Praktikas on mõnikord nii, et vaadeldav suurus ei sõltu teisest suurusest mitte otse, vaid mingi vahepealse kolmanda suuruse kaudu. Näiteks kauba müügihind sõltub kauba omahinnast kauba hulgihinna kaudu.

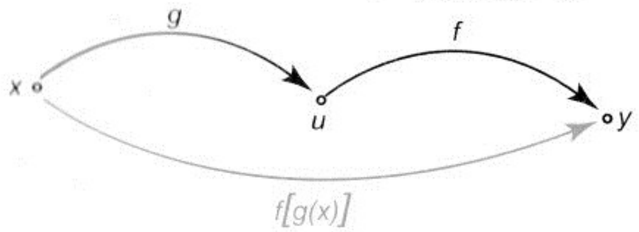
Olgu antud funktsioon $y=\sqrt{3x-1}$. Et arvutada funktsiooni väärtust kohal x, selleks tuleb 1) leida $3x-1$; 2) võtta saadud tulemusest ruutjuur. Teiste sõnadega, kõigepealt tuleb leida funktsiooni $g(x)=3x-1$ väärtus ja seejärel funktsiooni $y=\sqrt{g(x)}$ väärtus. Seega võib funktsiooni $y=\sqrt{3x-1}$ vaadelda funktsioonina, mis on moodustatud funktsioonidest $u=g(x)=3x-1$ ja $f(u)=\sqrt{u}$. Öeldakse, et funktsioon $y=\sqrt{3x-1}$ on liitfunktsioon ja seda võib üles kirjutada järgmiselt:

$y=f(u)=\sqrt{u}$ ja $u=g(x)=3x-1$ ehk $y=f[g(x)]$.

Selle funktsiooni puhul on tegemist kahekordse vastavusega: $x\to u\to y$. See tähendab, et funktsiooni väärtus pole argumendi x kaudu määratud mitte otse, vaid vahepealse muutuja kaudu.

Olgu antud funktsioonid $y = f(u)$ ja $u = g(x)$. Nendest moodustatud funktsiooni $y = f[g(x)]$ nimetatakse liitfunktsiooniks.

Sel juhul peab alati olema täidetud ka järgmine tingimus: funktsiooni $u = g(x)$ väärtused peavad kuuluma funktsiooni $y = f(u)$ määramispiirkonda.
Piltlikult on liitfunktsiooni $y = f[g(x)]$ kujutatud joonisel 2.49.



Joon. 2.49

Näide 1.

Olgu $f(u) = u^2$ ja $u = g(x) = x - 5$, siis funktsiooni $y = f[g(x)]$ võime esitada kujul $y = (x-5)^2$. Funktsioon f on välimine ja funktsioon g on sisemine funktsioon.

Näide 2.

Olgu antud funktsioon $y = (2x^3 - 3)^5$. See on liitfunktsioon, kus viiendasse astmesse on tõstetud funktsioon $u = g(x) = 2x^3 - 3$. Funktsiooni $y = (2x^3 - 3)^5$ saab esitada vahepealse muutuja u kaudu kujul $y = f(u) = u^5$. Seega võib funktsiooni $y = (2x^3 - 3)^5$ kirjutada kahe funktsiooni kaudu järgmiselt: $y = u^5$, $u = 2x^3 - 3$. Siin on funktsioon f välimine ja funktsioon g sisemine funktsioon.

Näide 3.

Olgu antud liitfunktsioon $y = \sqrt{4 - x^2}$. Selle funktsiooni võime esitada juurfunktsiooni ja ruutfunktsiooni kaudu järgmiselt: $y = \sqrt{u}$, $u = 4 - x^2$. Leiame selle funktsiooni määramispiirkonna. Funktsioon $y = f[g(x)]$ on määratud, kui funktsiooni $u = g(x)$ väärtused kuuluvad funktsiooni $f(u) = \sqrt{u}$ määramispiirkonda. Viimane funktsioon on määratud, kui $u \geq 0$ ehk kui $4 - x^2 \geq 0$. Viimase võrratuse lahenditeks on $-2 \leq x \leq 2$. Seega funktsiooni $y = \sqrt{4 - x^2}$ määramispiirkond $X = [-2; 2]$.

254. On antud funktsioonid $u = g(x)$ ja $y = f(u)$. Moodustage funktsioon $y = f[g(x)]$.

1) $y = \sqrt[3]{u}$, $u = 3x^2 - 5$;
2) $y = u^4$, $u = 1 - x$;
3) $y = u^{100}$, $u = 2x + 7$;
4) $y = u^{\frac{1}{3}}$, $u = x^3 - x^2$;
5) $u = x - 6$, $y = u^{-2}$;
6) $u = x - 6$, $y = \sqrt{u}$.

255. Kirjutage liitfunktsioon $y = f[g(x)]$ kahe funktsiooni $f(u)$ ja $g(x)$ kaudu. Kumb neist on välimine, kumb sisemine funktsioon? Leidke liitfunktsiooni määramispiirkond.

1) $y = (3x-1)^4$;
2) $y = \sqrt{x-3}$;
3) $y = (x^2-4)^3$;
4) $y = (4x^2+5)^{-2}$;
5) $y = \sqrt[4]{x^2-1}$;
6) $y = \sqrt[3]{x^6+x}$;
7) $y = (x^3-x+1)^{\frac{1}{2}}$;
8) $y = \sqrt[4]{3x^3-2}$;
9) $y = 5 - \sqrt{6x-1}$.

256. On antud funktsioonid $f(x) = 2x + 5$ ja $g(x) = \sqrt{x}$. Moodustage funktsioon $y = f[g(x)]$ ja funktsioon $h = g[f(x)]$, s.t. esimesel juhul on funktsioon f välimiseks, aga teisel juhul sisemiseks funktsiooniks.

257. Moodustage funktsioonid $f[g(x)]$ ja $g[f(x)]$.

1) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x-1}$;
2) $f(x) = x^8$, $g(x) = 2x^4 + 1$;
3) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $g(x) = 2x^3 + 4$;
4) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $g(x) = x^2$.

258. On antud funktsioon $f(x)$. Leidke selle funktsiooni pöördfunktsioon $f^{-1}(x)$. Moodustage funktsioonid $f[f^{-1}(x)]$ ja $f^{-1}[f(x)]$. Võrrelge tulemusi.

1) $f(x) = \sqrt{x+1}$;
2) $f(x) = 2x - 1$;
3) $f(x) = 3 - 2x$.

Enesekontrolliks

259. Mis on funktsioon? Missugused on funktsiooni esitusviisid?

260. Defineerige lineaarfunktsioon ja ruutfunktsioon.

261. Heli levimise kiiruse $v\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$ ja õhutemperatuuri t (°C) vahel on seos $v = 331 + 0{,}6t$. Millise kiirusega levib heli talvepäeval temperatuuril –35 °C ja suvepäeval temperatuuril 30 °C?

262. Küünal põleb kiirusega 4 cm tunnis. Leidke seos põleva küünla pikkuse p (cm) ja põlemise aja t (h) vahel, kui süüdatava küünla pikkus on 30 cm. Joonestage selle seose graafik. Leidke graafikult, mitme tunni pärast on küünal täielikult põlenud.

263. USA-s mõõdetakse temperatuuri Fahrenheiti kraadides, kus jää sulamistemperatuur on 32° ja vee keemistemperatuur 212°. Avaldage valemina seos Celsiuse kraadide C teisendamiseks Fahrenheiti kraadideks F.

264. Keha temperatuuri T (kraadides) ja aja t (sekundites) vahel on seos $T = 0{,}5t^2$. Joonestage selle seose graafik, kui $t \in [0; 10]$. Kui kõrgeks võib keha temperatuur tõusta? Millisel ajahetkel on temperatuur maksimaalne?

265. Mida nimetatakse funktsiooni määramispiirkonnaks ja muutumispiirkonnaks?

266. Leidke funktsiooni määramispiirkond.

1) $y = 3x^2 - 5x + 1$; 2) $y = 12 - 2x$; 3) $y = \sqrt{2x - 1}$;

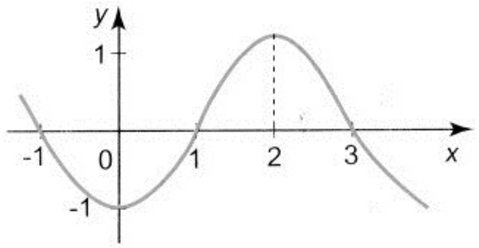
4) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$; 5) $y = \sqrt{x^2 + x}$; 6) $y = (4x + 1)^{\frac{1}{3}}$.

267. Mida nimetatakse funktsiooni nullkohtadeks, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnaks?

268. Millistel tingimustel on funktsioon $y = f(x)$ vahemikus $(a; b)$ a) kasvav, b) kahanev? Tooge näide kasvavast ja kahanevast funktsioonist.

269. Millistel tingimustel on koht x_0 funktsiooni ekstreemumkoht? Tooge näide funktsioonist (graafik), millel on a) maksimumkoht; b) miinimumkoht ja maksimumkoht.

270. Uurige joonisel 2.50 esitatud funktsiooni.



Joon. 2.50

271. Joonestage funktsiooni graafik ja uurige selle abil funktsiooni.

1) $y = 3x + 2$; 2) $y = |3 - x|$; 3) $y = -x^2 + 2x$;

4) $y = x^3$; 5) $y = x^{-2}$; 6) $y = 1 + x^5$;

7) $y = (x - 2)^3 + 1$; 8) $y = -\sqrt{x}$; 9) $y = -2x^{-1}$.

272. Joonestage funktsiooni graafik, lähtudes funktsiooni $y = x^4$ graafikust.

1) $y = -x^4$; 2) $y = x^4 + 5$; 3) $y = (x - 2)^4$; 4) $y = 0{,}5x^4$.

273. Missugust funktsiooni nimetatakse paarisfunktsiooniks, missugust paarituks funktsiooniks? Tooge näiteid. Missugused ülesandes 271 esitatud funktsioonidest on a) paarisfunktsioonid; b) paaritud funktsioonid?

274. Leidke funktsiooni pöördfunktsioon, kui see on olemas. Leidke nii esialgse funktsiooni kui ka pöördfunktsiooni määramispiirkond ja muutumispiirkond.

1) $y = -2x + 1$; 2) $y = x^2 + 1, x \geq 0$; 3) $y = x^2 - 5x$; 4) $y = 2x^3$.

275. Kirjutage funktsioon $y = [g(x)]$ kahe funktsiooni kaudu vahepealse muutuja abil.

1) $y = \sqrt[3]{9 - x^2}$; 2) $y = \sqrt{3x + 2}$; 3) $y = (5 + x^3)^{10}$.

3. FUNKTSIOONID II

3.1. REAALARVULISE ASTENDAJAGA ASTE

Tuletame meelde, et reaalarvu $a \in \mathbf{R}$ korral:

$a^0 = 1$, kui $a \neq 0$

$a^1 = a$

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tegurit}}$, kui $n \in \{2; 3; 4; \ldots\}$

$a^{-k} = \dfrac{1}{a^k}$, kui $a \neq 0$ ja $k \in \mathbf{Z}$ või $a > 0$ ja $k \in \mathbf{Q}$

$$a^{\frac{m}{n}} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^m}, & \text{kui } a > 0,\ m \in \mathbf{Z} \text{ ja } n \in \mathbf{Z}^+ \\ 0, & \text{kui } a = 0,\ m \in \mathbf{Z}^+ \text{ ja } n \in \mathbf{Z}^+ \end{cases}$$

Näide 1.

1) $2{,}603^0 = 1$, 2) $8675^1 = 8675$,

3) $3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$, 4) $(-0{,}7)^3 = (-0{,}7) \cdot (-0{,}7) \cdot (-0{,}7) = -0{,}343$,

5) $4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16} = 0{,}0625$, 6) $10{,}1^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{10{,}1^3} = \sqrt[4]{1030{,}301} = 5{,}66553635$,

7) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = 9$, 8) $0^{7{,}5} = 0$.

Kõigi nende astmete korral on astendajaks ratsionaalarv, mille üldkuju on $\dfrac{m}{n}$, kus $m \in \mathbf{Z}$ ja $n \in \mathbf{Z}^+$. Tõepoolest, on ju $m = \dfrac{m}{1}$.

Tähendab, seni tunneme ratsionaalarvuliste astendajatega ($u \in \mathbf{Q}$, $v \in \mathbf{Q}$) astmeid. Nende korral kehtivad valemid

$$a^u \cdot a^v = a^{u+v}, \quad a^u : a^v = a^{u-v}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u}. \quad (1)$$
$$(a^u)^v = a^{u \cdot v}, \quad (ab)^u = a^u b^u,$$

Selgitame nüüd astme a^r tähendust, kui astendaja r on irratsionaalarv ning $a > 0$, $a \in \mathbf{R}$.

Alustame konkreetsest näitest: millist arvu tähendab aste $5^{\sqrt{2}}$?

Irratsionaalarvu $\sqrt{2}$ puuduga võetud kümnendlähendid moodustavad jada 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; 1,414213; 1,4142135; …

Kui selle jada üldliige tähistada sümboliga r_n, siis $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \sqrt{2}$. Arvu 5 vastavad astmed annavad aga jada

5^1; $5^{1,4}$; $5^{1,41}$; $5^{1,414}$; $5^{1,4142}$; $5^{1,41421}$; $5^{1,414213}$; $5^{1,4142135}$; …,

mille üldliige on 5^{r_n}. Et selle jada liikmed on ratsionaalarvuliste astendajatega astmed, siis teame, et neil on arvu tähendus ning me saame neid arvutada. Tulemused on järgmise tabeli kolmandas veerus.

n	r_n	5^{r_n}
1	1	5
2	1,4	9,5182697
3	1,41	9,6726997
4	1,414	9,7351771
5	1,4142	9,7383052
6	1,41421	9,7384619
7	1,414213	9,7385089
8	1,4142135	9,7385168

Nende põhjal võib arvata, et jadas järjest kaugemale minnes jääb jada liikmetes järjest rohkem kümnendkohti muutumatuks. See viib mõttele, et jadal 5^1; $5^{1,4}$; $5^{1,41}$; $5^{1,414}$; …; 5^{r_n}; … on piirväärtus. Nii ka tegelikult on, eksisteerib $\lim\limits_{n\to\infty} 5^{r_n}$.

Seda loetaksegi $5^{\sqrt{2}}$ väärtuseks, s. t. $5^{\sqrt{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} 5^{r_n}$.

Millega see piirväärtus täpselt võrdub, ei ole tegelikult oluline. Tähtis on, et ta olemas on (vastasel juhul puuduks kirjutisel $5^{\sqrt{2}}$ mõte) ja et me saame kõnealuse piirväärtuse (järelikult ka $5^{\sqrt{2}}$ väärtuse) leida vastavalt vajadusele kuitahes suure täpsusega. Nii näiteks võime tabeli kolmanda veeru andmete põhjal oletada, et täpsusega 0,05 on $5^{\sqrt{2}} = 9{,}7$, täpsusega 0,005 on $5^{\sqrt{2}} = 9{,}74$, täpsusega 0,0005 on $5^{\sqrt{2}} = 9{,}739$.

Analoogiliselt saame tähenduse anda igale astmele a^r, kus a on positiivne reaalarv ja r on positiivne irratsionaalarv. Seejuures on võimalik a^r väärtust arvutada kuitahes täpselt. Paneme aga tähele, et negatiivse a korral selline mõttekäik ei kõlba, sest juba ratsionaalarvulise astendajaga aste a^r defineeriti vaid juhul $a > 0$.

Kui astendaja on negatiivne irratsionaalarv $-r$ ($r > 0$), siis defineeritakse a^{-r} võrdusega

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}.$$

Näide 2.

$$5^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{5^{\sqrt{2}}} \approx \frac{1}{9{,}739} \approx 0{,}1027.$$

Kokku võttes oleme juhul $a > 0$ defineerinud astme a^r nii ratsionaalarvulise kui ka irratsionaalarvulise astendaja, s. t. iga reaalarvulise astendaja r korral. Reaalarvulise astendaja astmete korral jäävad kehtima seosed (1).

Näide 3.

1) $4^{\sqrt{3}} \cdot 4^{2\sqrt{3}} = 4^{\sqrt{3}+2\sqrt{3}} = 4^{3\sqrt{3}} = (4^3)^{\sqrt{3}} = 64^{\sqrt{3}}$;

2) $3^{7+\sqrt{5}} : 3^{5+\sqrt{5}} = 3^{7+\sqrt{5}-(5+\sqrt{5})} = 3^2 = 9$;

3) $(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{6}} = 2^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = 2^{\sqrt{18}} = 2^{3\sqrt{2}} = (2^3)^{\sqrt{2}} = 8^{\sqrt{2}}$;

4) $2^{\sqrt{7}} \cdot 5^{\sqrt{7}} = (2\cdot 5)^{\sqrt{7}} = 10^{\sqrt{7}}$;

5) $12^{\sqrt{2}} : 4^{\sqrt{2}} = \left(\frac{12}{4}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}}$.

Kehtivad ka astmete võrdsusest tulenevad järeldused ($a > 0$, $u, v \in \mathbf{R}$):

$a^u = a^v$ → $u = v$ või $a = 1$

Näide 4.

Lahendame võrrandi $7^x = 343$.

Lahendus.

Antud võrrand esitub kujul $7^x = 7^3$, millest $x = 3$. Lahendatud võrrand on üks eksponentvõrranditest, s. t. üks võrranditest, kus tundmatu esineb vaid astendajas. Nendega tutvume põhjalikumalt hiljem.

* Oluliselt keerulisemaid võrrandeid saab lahendada järgneva põhjal ($a > 0$, $b > 0$, $u \in \mathbf{R}$):

$a^u = b^u$ → **$a = b$ või $u = 0$ või $a = -b$, kui u on paarisarv**

Näide 5.

Lahendame võrrandi $(x-6)^4 = 16$.

Lahendus.

1) Võrrandile saab anda kuju $(x-6)^4 = 2^4$, millest $x-6=2$ ehk $x_1 = 8$ või $x-6=-2$ ehk $x_2 = 4$, sest astendaja on paarisarv. Kontrollimine näitab, et mõlemad lahendid sobivad.
2) Antud võrrandi oleks saanud lahendada ka juurimise teel. Siis $x-6=\pm 2$, millest $x_1 = 8$, $x_2 = 4$.
3) Kirjutades aga antud võrrandi kujul $(x-6)^4 - 4^2 = 0$, saame võrrandi vasaku poole teisendada korrutiseks:
$[(x-6)^2 - 4]\cdot[(x-6)^2 + 4] = 0$.
Nüüd $(x-6)^2 - 4 = 0$ või $(x-6)^2 + 4 = 0$. Esimene võrrand annab juba tuttavad lahendid 8 ja 4, teisel võrrandil lahendid puuduvad.
4) Kui esialgses võrrandis avada sulud, saame täieliku neljanda astme võrrandi, mille edasine lahendamine on oluliselt keerulisem.

Näide 6.

Lahendame võrrandi $(x-6)^x = 2^x$.

Lahendus.

Kasutame astmete võrdsusest tulenevaid järeldusi: $x-6=2 \Rightarrow x_1 = 8$; kui x on paarisarv, siis võib olla ka $x-6=-2 \Rightarrow x_2 = 4$ ja kui astendaja $x=0$, siis saame veel $x_3 = 0$. Kõik leitud x väärtused rahuldavad esialgset võrrandit, s. t. on selle lahendid. Seega oleme leidnud meile täiesti tundmatut tüüpi võrrandi kolm lahendit.

Vastus. $x_1 = 8$, $x_2 = 4$, $x_3 = 0$. *

Kasulik on veel teada t e o r e e m i:

kui $0 < a < 1$, siis $a^{r_1} > a^{r_2} \Leftrightarrow r_1 < r_2$;
kui $a > 1$, siis $a^{r_1} < a^{r_2} \Leftrightarrow r_1 < r_2$.

Näide 7.

1) $0{,}8^{\sqrt{2}} > 0{,}8^{\sqrt{3}}$, sest $a = 0{,}8 < 1$ ja $\sqrt{2} < \sqrt{3}$,
2) $2{,}6^5 < 2{,}6^{\sqrt{26}}$, sest $a = 2{,}6 > 1$ ja $5 < \sqrt{26}$.

Näide 8.

Lahendame võrratuse

1) $0{,}6^x > 0{,}6^5$, 2) $1{,}3^{x+1} < 1{,}3^2$.

Lahendus.

1) Et astme alus $a = 0{,}6 < 1$, siis suuremale astmele vastab väiksem astendaja. Tähendab, $x < 5$.

2) Et $a = 1{,}3 > 1$, siis suuremale astmele vastab suurem astendaja:
$x + 1 < 2 \Rightarrow x < 1$.

Astme a^r, kus $a > 0$ ja $r \in \mathbf{R}$ väärtuse arvutamiseks peame enamikul juhtudel kasutama taskuarvutit. Selleks on arvutil klahv $\boxed{x^y}$ või $\boxed{y^x}$. Sõltuvalt arvuti margist arvutatakse a^r kas skeemi

$a\ \boxed{x^y}\ r\ \boxed{=}$ või $r\ \boxed{x^y}\ a\ \boxed{=}$

järgi.

Näide 9.

$2{,}5^{1{,}8} = 5{,}2034575$, arvutusskeem 2,5 $\boxed{x^y}$ 1,8 $\boxed{=}$;

$0{,}3^{-7} = 4572{,}4737$, arvutusskeem 0,3 $\boxed{x^y}$ 7 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$.

Avaldiste $a^{\sqrt{b}}$ ja $a^{\frac{1}{c}}$ väärtusi saab arvutada vastavalt skeemide järgi

$a\ \boxed{x^y}\ b\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}$ ja $a\ \boxed{x^y}\ c\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}$.

Vaid väheste arvutite korral tuleb eelnevalt leida $\sqrt{b}$ või vastavalt $\frac{1}{c}$ ning viia see mällu, kust see siis õigel ajal jälle tabloole tuua.

Kui arvutil on klahv $\boxed{x^{1/y}}$ või $\boxed{\sqrt[y]{x}}$ või $\boxed{\sqrt[x]{y}}$, saab $a^{\frac{1}{c}}$ ehk $\sqrt[c]{a}$ väärtust arvutada lühemalt:

$a\ \boxed{x^{1/y}}\ c\ \boxed{=}$.

Näide 10.

$3^{\sqrt{3}} = 4{,}7288044$, arvutusskeem 3 $\boxed{x^y}$ 2 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$,

$\sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{5}} = 1{,}3195079$, arvutusskeem 4 $\boxed{x^y}$ 5 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$
või 4 $\boxed{x^{1/y}}$ 5 $\boxed{=}$.

Avaldise $a^{\frac{m}{n}}$ ehk $\sqrt[n]{a^m}$ väärtuse arvutamiseks sobivad arvutusskeemid

$a\ \boxed{x^y}\ \boxed{(}\ m\ \boxed{\div}\ n\ \boxed{)}\ \boxed{=}$, $a\ \boxed{x^y}\ m\ \boxed{=}\ \boxed{x^y}\ n\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}$,

$a\ \boxed{x^y}\ m\ \boxed{a\,b/c}\ n\ \boxed{=}$, $m\ \boxed{\div}\ n\ \boxed{M}\ a\ \boxed{x^y}\ \boxed{MR}\ \boxed{=}$.

Näide 11.

$1{,}7^{\frac{2}{3}} = 1{,}4244021$, mille saame arvutada mitmeti:

1,7 [x^y] [(] 2 [÷] 3 [)] [=],

1,7 [x^y] 2 [ab/c] 3 [=],

1,7 [x^y] 2 [=] [x^y] 3 [1/x] [=],

1,7 [x^2] [x^y] 3 [1/x] [=],

2 [÷] 3 [M] 1,7 [x^y] [MR] [=].

Astme 10^r leidmiseks on arvutil klahv [10^x] ning vastav arvutusskeem on r [10^x]. Näiteks arvutades skeemi järgi 3,04 [10^x] saame, et $10^{3{,}04} = 1096{,}4782$.

A

276. Millised on arvu c lubatavad väärtused järgmistes avaldistes?

1) c^5; 2) c^8; 3) c^{11}; 4) c^1;
5) $(c+3)^1$; 6) $(c-5)^1$; 7) c^{10}; 8) $(c-8)^0$;
9) $(-c)^0$; 10) c^{-4}; 11) c^{-3}; 12) c^{-1};
13) $c^{\frac{3}{4}}$; 14) $c^{\frac{1}{8}}$; 15) $c^{\frac{1}{3}}$; 16) $c^{-\frac{3}{8}}$.

277. Arvutage

1) 4^3; 2) $(-4)^3$; 3) -4^3;
4) 5^0; 5) -5^0; 6) $(-5)^0$;
7) 0^6; 8) 0^1; 9) 0^0;
10) $3{,}2^1$; 11) -7^1; 12) 1^{18};
13) $(-1)^9$; 14) -1^4; 15) $(-1)^6$.

278. Arvutage

1) 2^{-3}; 2) 5^{-1}; 3) 6^{-2};
4) $2{,}5^{-1}$; 5) $0{,}25^{-2}$; 6) 0^{-3};
7) 1^{-7}; 8) $(-2)^{-3}$; 9) $(-10)^{-2}$;
10) -4^{-2}; 11) $(-1)^{-6}$; 12) $(-5)^{-3}$;
13) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; 14) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$; 15) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$;
16) $\frac{1}{3^{-2}}$; 17) $\frac{2}{5^{-3}}$; 18) $\frac{9}{2^{-4}}$.

279. Arvutage

1) $4^{\frac{1}{2}}$; 2) $0{,}25^{\frac{3}{2}}$; 3) $125^{\frac{2}{3}}$;
4) $0{,}0625^{0{,}75}$; 5) $16^{0{,}125}$; 6) $9^{-0{,}5}$;
7) $-16^{\frac{1}{4}}$; 8) $(-16)^{\frac{1}{4}}$; 9) $0^{\frac{2}{7}}$;
10) $1^{\frac{4}{9}}$; 11) $-8^{\frac{1}{3}}$; 12) $0^{-2{,}4}$.

280. Arvutage

1) $2^{1,5} \cdot 2^{2,5}$; 2) $4^{2,8} \cdot 4^{0,2}$; 3) $3^{5,4} \cdot 3^{-2,4}$;
4) $1{,}8^7 : 1{,}8^5$; 5) $(-0{,}4)^9 : (-0{,}4)$; 6) $3^{-6} : 3^{-4}$;
7) $\left(4^{\frac{5}{12}}\right)^6$; 8) $\left(2^{-\frac{4}{7}}\right)^{14}$; 9) $(3^{0{,}25})^8$;
10) $(7 \cdot 3)^2$; 11) $(25 \cdot 49)^{\frac{1}{2}}$; 12) $(8 \cdot 27)^{\frac{2}{3}}$;
13) $\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{1}{3}}$; 14) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$; 15) $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$.

281. Lihtsustage avaldis, kui kõik tähelised suurused on positiivsed:

1) $a^7 \cdot a^3$; 2) $b^{-2} \cdot b^6$; 3) $c^{-0,4} \cdot c^{-2,8}$;
4) $k^n \cdot k^{8-n}$; 5) $r^0 \cdot r^{-1}$; 6) $m^{4n} \cdot m^n$;
7) $a^4 : a^3$; 8) $a^{-3,2} : a^{-1,2}$; 9) $a^{-1} : a^0$;
10) $(p^{-5})^4$; 11) $(q^0)^{-5}$; 12) $(r^{-0,5})^7$;
13) $2n \cdot 4n^3$; 14) $12a^5 : 10a^{-5}$; 15) $(8r^{-3})^{\frac{4}{3}}$;
16) $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[6]{a}$; 17) $a^{-5} : \sqrt[3]{a^{0,3}}$; 18) $(\sqrt[8]{a^3})^{\frac{4}{21}}$.

282. Arvutage

1) $\sqrt[3]{4} : \sqrt[6]{2}$; 2) $9^{-\frac{5}{2}} \cdot \sqrt[3]{27}$; 3) $(\sqrt[8]{64})^{\frac{4}{15}}$;
4) $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[6]{a^3}$; 5) $a^{-5} \cdot \sqrt[3]{a^{0,3}}$; 6) $(\sqrt[7]{a})^0$.

283. Arvutage

1) $(4^{\frac{3}{4}} - 2^{0,5})^2$; 2) $\left[3 \cdot 2^{-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{-1}$;
3) $3^{0,25} \cdot 81^{0,125} \cdot 9^{\frac{3}{2}}$; 4) $\left[4^{-\frac{1}{4}} + (2^{1,5})^{-\frac{4}{3}}\right] \cdot 4^{-0,25}$;
5) $\sqrt[4]{4} : 0{,}5^{-3} : 2^{-3}$; 6) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^0\right]^{-0,5} - 7{,}5\left(\sqrt[4]{4^{-3}}\right)^2 - 3 \cdot 2^{-4}$.

284. Lihtsustage avaldis

1) $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[12]{a^4} \cdot a^{15}$;
2) $(a^{\frac{1}{6}} - b^3)(a^{\frac{1}{6}} + b^3)$;
3) $\left(a^{\frac{8}{7}} + a^{\frac{4}{7}}\right)a^{\frac{7}{2}}$;
4) $\left(x^{\frac{1}{3}} - c^{-1}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} + c^{-1}\right)$.

285. Lihtsustage avaldis

1) $(5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$;
2) $4^{\sqrt{3}} : 4^{\sqrt{3}-2}$;
3) $2^{\sqrt{3}} \cdot 2^{\sqrt{2}}$;
4) $(2^{\sqrt{6}})^{\sqrt{3}}$;
5) $5^{\sqrt{12}} \cdot 5^{\sqrt{3}} \cdot 5^{\sqrt{27}}$;
6) $3^{\sqrt{5}} \cdot 3^{-3\sqrt{5}}$;
7) $2^{\sqrt{3}} \cdot 5^{\sqrt{3}}$;
8) $2^{3 \cdot 2^{0,5}} : 2^{2^{0,5}}$;
9) $10^{\sqrt{7}} : 2^{\sqrt{7}}$;
10) $7^{\sqrt{5}} \cdot 7^{-\sqrt{5}}$;
11) $2^{\sqrt{2}} : 16^{-\sqrt{2}}$;
12) $10^{2\sqrt{2}} : 25^{2\sqrt{2}}$.

286. Lahendage võrrand

1) $2^x = 16$;
2) $3^x = 27^{-1}$;
3) $5^{-x} = 25$;
4) $\sqrt[4]{4} = 8^x$;
5) $9 \cdot 3^x = 27^{-x}$;
6) $0{,}125^x = 2^{4x}$;
7) $5^x = 25^{\sqrt{2}}$;
8) $4^{\sqrt{2}} = 2^{x+\sqrt{2}}$;
9) $6^{x+\sqrt{2}} = 1$;
10) $5^{x+1} = 0$;
11) $3^{x^2-4} = 1$;
12) $7^{x-8} = -1$.

287. Selgitage, kumb on suurem, kas

1) 20^3 või 30^3;
2) $0{,}5^4$ või $0{,}8^4$;
3) $(-8)^6$ või 8^6;
4) $(-2)^7$ või $(-3)^7$;
5) $(-2)^{10}$ või $(-3)^{10}$;
6) -5^4 või $(-5)^4$;
7) $(-0{,}1)^5$ või $(-0{,}3)^5$;
8) $(-0{,}2)^4$ või $(-0{,}3)^4$;
9) $2^{0,5}$ või $3^{0,5}$.

288. Selgitage, kumb on suurem, kas

1) 2^2 või 2^5;
2) 2^{-2} või 2^{-3};
3) 2^{-10} või 2^4;
4) 10^n või 10^m; $n, m \in \mathbf{Z}$;
5) 2^0 või 2^{-1};
6) a^n või a^m; $a > 1$; $n, m \in \mathbf{Z}$;
7) $3^{\frac{1}{3}}$ või $3^{\frac{1}{2}}$;
8) $3^{\frac{1}{3}}$ või $3^{-\frac{1}{2}}$;
9) $3^{-\frac{1}{3}}$ või $3^{-\frac{1}{2}}$;
10) $64^{\frac{2}{3}}$ või $64^{\frac{7}{2}}$;
11) $0{,}5^2$ või $0{,}5^5$;
12) $0{,}5^{-2}$ või $0{,}5^{-3}$;
13) $0{,}5^{-10}$ või $0{,}5^4$;
14) $0{,}5^n$ või $0{,}5^m$; $n, m \in \mathbf{Z}$;
15) $0{,}9^{0,3}$ või $0{,}9^{0,2}$;
16) $0{,}8^{\frac{1}{3}}$ või $0{,}8^{\frac{1}{2}}$.

289. Selgitage, kumb on suurem, kas

1) $3^{\sqrt{2}}$ või $3^{\sqrt{3}}$;
2) $7^{4\sqrt{3}}$ või $7^{\sqrt{5}}$;
3) $10^{0,5}$ või $\sqrt{10}$;
4) $16^{-0,5}$ või $2^{-\sqrt{2}}$;
5) $0{,}3^{1,5}$ või $0{,}3^{\sqrt{2}}$;
6) $0{,}16^{-\sqrt{2}}$ või $0{,}4^{-\sqrt{3}}$;
7) $a^{\sqrt{2}}$ või $a^{\sqrt{3}}$;
8) $a^{-\sqrt{5}}$ või $a^{-\sqrt{7}}$.

290. Milline järgnevatest astmetest on 1) suurem kui 1, väiksem kui 1, võrdne arvuga 1; 2) suurem kui 0, väiksem kui 0, võrdne arvuga 0?

1) $(-2)^{10}$?
2) $(-3)^1$;
3) -3^2;
4) 1^{-5};
5) $(-7)^0$;
6) 0^4;
7) $6^{0,6}$;
8) $0{,}8^{-4}$;
9) $0{,}5^5$;
10) $2^{0,05}$;
11) a^6;
12) a^5.

291. Lahendage võrratus

1) $4^x < 4^1$;
2) $2^{2x} \le 4$;
3) $125^x > 5^{4,5}$;
4) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$;
5) $0{,}3^{x+1} > 0{,}3$;
6) $0{,}1^{2x} \le 0{,}01$;
7) $3^{0,1} \ge 3^{4x+1}$;
8) $8^{0,5} < 2^{x+1}$;
9) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 4 \cdot 3^{-2}$;
10) $3^x < 3^{\sqrt{2}}$;
11) $1^x \le 1^{\sqrt{5}}$;
12) $\left(\frac{5}{3}\right)^x > \left(\frac{5}{3}\right)^{2+\sqrt{2}}$
13) $-4^x < 16$;
14) $5^x < -125$;
15) $2^x > 5^0$.

292. Arvutage, ligikaudne vastus ümardage tuhandikeni.

1) 2^4;
2) $5^{2,4}$;
3) $1{,}038^{10}$;
4) $2753^{0,35}$;
5) 2^{-3};
6) $4^{-6,2}$;
7) $2{,}13^{-6}$;
8) $9009^{-0,7}$;
9) $2^{\sqrt{16}}$;
10) $5^{\sqrt{9,3}}$;
11) $1{,}1^{\sqrt{476}}$;
12) $6{,}6^{\sqrt{63,9992}}$;
13) $9^{\frac{1}{2}}$;
14) $77^{\frac{1}{9}}$;
15) $25^{\frac{1}{10}}$;
16) $32086^{\frac{1}{4}}$;
17) $\sqrt[4]{81}$;
18) $\sqrt[12]{6}$;
19) $\sqrt[3]{0{,}02}$;
20) $\sqrt[25]{10{,}08}$;
21) $8^{\frac{2}{3}}$;
22) $80^{\frac{7}{5}}$;
23) $0{,}9^{-\frac{4}{7}}$;
24) $7070^{-\frac{8}{9}}$;
25) $\sqrt[3]{8^4}$;
26) $\sqrt[6]{2{,}1^3}$;
27) $\sqrt[5]{99^{-2}}$;
28) $\sqrt[4]{0{,}052^6}$.

293. Arvutage

1) π^4;
2) 2^π;
3) π^π;
4) $5^{-\pi}$;
5) $-3{,}3^5$;
6) $(-3{,}3)^5$;
7) $(-0{,}72)^8$;
8) $-1{,}3^{2,9}$.

294. Arvutage

1) 10^7;
2) $10^{1,09}$;
3) $10^{-5,3}$;
4) $10^{18,04}$;
5) 10^π;
6) $10^{\sqrt{5}}$;
7) $\sqrt[7]{10}$;
8) $\sqrt[13]{10^4}$.

B

295. Lahendage võrrand

1) $(x+5)^{12} = 5^{12}$; 2) $x^{10} = 1024$; 3) $(2x-1)^9 = 3^9$;
4) $x^{11} = 2^{11}$; 5) $(x+2)^x = 5^x$; 6) $(x+7)^x = 5^x$;
7) $(x^2+2)^x = 3^x$; 8) $x^{x+5} = 1$; 9) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$;
10) $x^x = x$; 11) $x^{1-x} = x^{-1}$; 12) $x^{x-3} = x^2$.

3.2. LIITPROTSENDILINE KASVAMINE JA KAHANEMINE

Kui mingi suuruse esialgne väärtus c **kasvab** igas teatavas ajavahemikus p protsendi võrra ajavahemiku alguses olnud väärtusest, siis n-nda sellise ajavahemiku (näiteks aasta) lõpuks on selle suuruse väärtuseks

$$c\left(1+\frac{p}{100}\right)^n. \qquad (1)$$

Kui $n=0$, saame nullinda ajavahemiku lõpus ehk esimese ajavahemiku alguses oleva väärtuse c. Avaldis (1) väljendab vaadeldava suuruse **liitprotsendilist kasvamist**. Nii kasvab hoius pangas, biomass noores metsas, bakterite arv katseklaasis, inimeste arv Maal.

Näide 1.

Leiame, kui suureks kasvab rahasumma 1000 kr. 15 aasta jooksul, kui pank maksab aastas intressi 5%.

Lahendus.

Et $c = 1000$, $p = 5$ ja $n = 15$, siis 15 aasta möödudes on pangas hoius

$$21000\cdot\left(1+\frac{5}{100}\right)^{15} = 1000\cdot 1.05^{15} = 2078{,}95 \text{ kr.}$$

Kui mingi suuruse esialgne väärtus c **väheneb** igas kindlas ajavahemikus p protsendi võrra ajavahemiku alguses olnud väärtusest, siis n sellise ajavahemiku lõpuks on selle suuruse väärtuseks

$$c\left(1-\frac{p}{100}\right)^n. \qquad (2)$$

Ka siin saame esialgse väärtuse c, kui $n=0$. Avaldis (2) väljendab **liitprotsendilist kahanemist**, mille kohaselt väheneb näiteks radioaktiivse aine mass, aga samuti mingi masina või kogu tehase sisseseade väärtus aja jooksul.

Näide 2.

Teatud radioaktiivsest ainest laguneb ööpäevas 2%. Leiame, kui palju on seda ainet alles 4 ööpäeva möödudes, eeldusel, et esialgu oli ainet 10 grammi.

Lahendus.

Et tegemist on liitprotsendilise kahanemisega, siis 4. ööpäeva lõpuks on alles $10\cdot(1-0{,}02)^4 = 10\cdot 0{,}98^4 = 9{,}22$ g radioaktiivset ainet.

Näide 3.

Linnas elab 50 000 inimest. Mitme aasta pärast elab selles linnas kaks korda rohkem inimesi, kui igal aastal suureneb linna elanike arv 4% võrra?

Lahendus.

Ülesande tingimuste kohaselt on

$$50000\cdot\left(1+\frac{4}{100}\right)^n = 100000$$

ehk

$1{,}04^n = 2$.

Otsitavaks on astendaja n. Saadud võrrand on jälle eksponentvõrrand, kuid seda ei saa nii lahendada nagu art. 3.1 näiteülesandes 4.

Et arv n on aastate arv, s. t. naturaalarv, siis võiksime taskuarvutil leida järjest astmeid $1{,}04^2$; $1{,}04^3$; $1{,}04^4$ jne. ning jälgida, millise n korral saab 1,04 aste võrdseks arvuga 2 või ületab selle. Selleks sobib arvutusskeem (osal arvutitel tuleb klahvile x vajutada vaid üks kord)

1,04 x (x) = = = … = ,

kusjuures silmadega jälgime tablood ning mõttes loendame, mitu korda oleme klahvile = vajutanud. Ühe võrra suurem vajutuste arv (sest esimene vajutus annab $1{,}04^2$) ongi otsitav n.

Nii teinud, saame, et $n = 18$, sest $1{,}04^{17} \approx 1{,}95$, kuid $1{,}04^{18} \approx 2{,}03$.

Vastus. Linna elanike arv kahekordistub 18 aasta jooksul.

Näide 4.

Auto maksis uuena 320 000 kr. Kaheksa aasta pärast hinnati selle auto väärtuseks 179 200 kr. Mitme protsendi võrra vähenes igal aastal auto väärtus, kui tegemist on auto väärtuse liitprotsendilise kahanemisega?

Lahendus.

Olgu otsitavaks suuruseks p%. Siis

$$320000\left(1-\frac{p}{100}\right)^8 = 179200$$

ehk

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)^8 = 0{,}56.$$

Siit

$$1-\frac{p}{100}=\sqrt[3]{0,56}=1-\frac{p}{100}=0,93$$

ning

$$\frac{p}{100}=1-0,93=0,07.$$

Järelikult $p=7\%$.

Vastus. Igal aastal vähenes auto väärtus keskmiselt 7% võrra.

Tähistame liitprotsendilisel kasvamisel esineva avaldise $1+\frac{p}{100}$ ja liitprotsendilisel kahanemisel esineva avaldise $1-\frac{p}{100}$ tähega a ning vaadeldava suuruse tähega y. Siis $y=ca^n$, kusjuures kasvamise korral on $a>1$ ja kahanemise korral on $0<a<1$ ning $n\in\mathbf{N}$. Tähendab, liitprotsendiline kasvamine ja kahanemine on esitatavad funktsiooniga

$y=ca^n$,

kus argument $n\in\mathbf{N}$.

Näide 5.

Funktsioon $y=2560\cdot 0,8^n$, $n\in\mathrm{N}$ esitab teatud suuruse liitprotsendilist kahanemist, sest $a=0,8<1$; $p=20\%$. Funktsioon $y=c\cdot 2,5^n$, $c>0$, $n\in\mathrm{N}$ esitab liitprotsendilist kasvamist, sest $a=2,5>1$; $p=150\%$.

Näide 6.

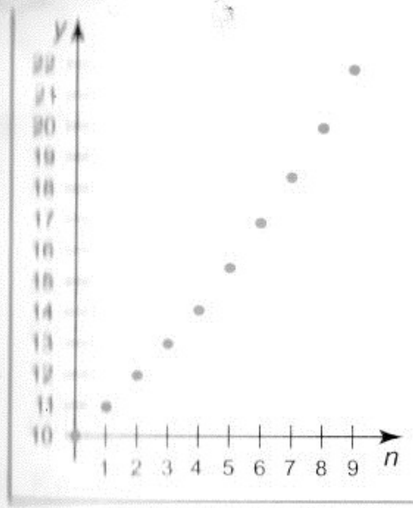
Kui panka pandi algkapital 10 kr. ja pank maksab aastas 9% intressi, siis iga aasta lõpuks on pangas rahasumma $y=10\cdot 1,09^n$ (kr.), kus $n\in\mathrm{N}$ ($n=0$ korral saame esimese aasta alguses pangas oleva hoiusumma). Konstrueerime funktsiooni graafiku.

Lahendus.

Vastav funktsiooni väärtuste tabel on järgmine:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	10	10,90	11,90	12,95	14,10	15,40	16,80	18,30	19,95	21,70

Märgime arvupaaridele vastavad punktid koordinaattasandile. Tulemuseks (joon. 3.1) ongi graafik. Punkte sujuva joonega ühendada ei tule, sest argument saab vaid naturaalarvulisi väärtusi.



Joon. 3.1

A

206. Pank maksab hoiuselt 5% intressi aastas. Kui suureks kasvab panka pandud 10 000 kr. suurune hoius 6 aasta jooksul? Kui suureks kasvab nimetatud hoius sama aja jooksul eeldusel, et aastas makstakse 5% intressi algsummast?

207. Mihkel pani 25. sünnipäevaks saadud 2000 kr. panka tähtajalisele hoiusele, kus makstakse intressi 7% aastas. Kui suureks kasvab see rahasumma ajaks, mil Mihkel läheb pensionile?

208. Toitelahusega katseklaasi on sattunud üks mikroob. See hakkab paljunema, kusjuures iga tunni järel iga mikroob pooldub. Mitu mikroobi on selles katseklaasis ööpäeva möödudes?

209. Metsameeste hinnangu järgi on ühel metsatükil 10 000 tihumeetrit puitu. Kui palju puitu on sellel metsatükil 10 aasta pärast, eeldusel, et puidu keskmine juurdekasv aastas on 2,5%?

300. Aastal 1980 arvati Maal olevat 4 600 000 000 inimest. Eelneva 500 aasta jooksul oli maakera elanike arvu keskmine juurdekasv aastas 0,47%. Kui palju pidanuks olema inimesi Maal aastal 2000 antud lähteandmete järgi arvutades? Püüdke leida teatmeteostest või internetist andmeid inimeste tegeliku arvu kohta Maal aastal 2000. Mis võib olla arvutatud tulemuse ja tegeliku arvu erinevuse põhjuseks?

301. Radioaktiivsest ainest laguneb ööpäevas 2,8%. Kui suur osa aine esialgsest kogusest on alles 1) esimese ööpäeva lõpuks, 2) 21. ööpäeva lõpuks, 3) 56. ööpäeva lõpuks?

302. Raadiumi **poolestusaeg**, s. o. aeg, mille jooksul väheneb aine kogus poole (s. t. 50%) võrra, on 1620 aastat. Milline osa raadiumi kogusest on alles 1) 3240, 2) 4860 aasta möödudes? Mõelge, kuidas tuleks leida, milline osa raadiumi kogusest on alles 810 a. möödudes. Hinnake, mitu protsenti meie ajaarvamise algusest maakeral olnud raadiumi kogusest on teie arvates praegu veel alles.

303. Masin maksis 500 000 krooni. Tema väärtus väheneb igal aastal 8% võrra aasta alguses olnud väärtusest. Kui suur on selle masina väärtus 1) 5 aasta, 2) 10 aasta möödudes?

304. Kui palju "maksab" 1 kroon aasta lõpuks, kui inflatsioon on 1% kuus? Mitu protsenti on sellisel juhul inflatsioon aastas?

305. Tuhandeliitrisest paagist voolab igas ööpäevas välja kahekümnendik selles olevast vedelikust. Leidke avaldis, mis võimaldab arvutada n ööpäeva möödudes paagis oleva vedeliku koguse. Mitu liitrit vedelikku on alles paagis 1) 2. ööpäeva, 2) 11. ööpäeva lõpuks?

306. Pank maksab aastas intressi 10%. Mitme aasta pärast kahekordistub selles pangas hoius?

307. Milline summa peab olema pangas, et saaks elada intressidest, kui pank maksab aastas 3% intressi ning aastas kulub elamiseks 60 000 krooni?

308. Ants sai pangast onu pärandusena 431 355,30 kr. Mitu protsenti maksis see pank intressi aastas, kui on teada, et onu oli pannud 28 aastat tagasi panka 50 000 kr.?

309. Kui suur rahasumma tuleb paigutada panka, kus intress on 5% aastas, et 20 aasta pärast oleks pangas 10 000 krooni?

310. Funktsioonid 1) $y = 7 \cdot 1{,}1^n$, $n \in \mathbf{N}$ ja 2) $y = 5 \cdot 0{,}8^n$, $n \in \mathbf{N}$ esitavad teatud suuruste liitprotsendilist muutumist. Iseloomustage neid muutumisi. Leidke kummalgi juhul vastav protsent ja vaadeldava suuruse esialgne väärtus. Konstrueerige antud funktsioonide graafikud.

311. Veenduge, et liitprotsendiliselt kasvava või kahaneva suuruse väärtused moodustavad geomeetrilise jada. Mis on jada teguriks? Kui suur on puu kogu juurdekasv viie aasta jooksul, kui esimesel aastal kasvas puu 50 cm võrra ning igal järgmisel aastal oli juurdekasv 20% võrra väiksem kui eelmisel aastal?

312. Kui radioaktiivse aine poolestusaeg (vt. ül. 302) on T ajaühikut ja tahetakse teada, kui palju radioaktiivse aine kogusest C_0 on alles t ajaühiku möödudes, siis arvutatakse see avaldise $C_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{T}}$ ehk $C_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ põhjal. Püüdke selgusele jõuda, milline on seos siin toodud avaldise ja liitprotsendilise kahanemise avaldise vahel. Leidke ülesande 302 andmetel, milline osa raadiumi esialgsest kogusest on alles 1) 10, 2) 100, 3) 1000, 4) 10 000 aasta möödudes? Kui palju on 20 grammist raadiumist alles 15 aasta pärast?

313. Kui pank maksab intressi p% aastas ja panka pannakse c krooni, siis $\frac{1}{n}$ aasta möödudes on rahasumma suurus $c(1+\frac{p}{100})^{\frac{1}{n}}$ krooni. Leidke, kui suureks kasvab summa 1000 krooni 1) aastaga, 2) kuuga, 3) nädalaga, kui aastane intress on 3%.

314. Milline summa peab pangas olema siis, kui iga kuu tahetakse pangast saada intressi 5000 krooni (vt. ülesannet 307) ja intressimäär aastas on ikka 3%?

3.3. EKSPONENTFUNKTSIOON

Eelmises artiklis selgus, et suuruste liitprotsendiline kasvamine või kahanemine väljendub funktsioonina $y = ca^x$, kus $0 < a < 1$ või $a > 1$ ning $x \in \mathbf{N}$. Vaatleme nüüd funktsiooni $y = ca^x$, kus $x \in \mathbf{R}$.

Funktsiooni $y = ca^x$, kus $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbf{R}$, nimetatakse eksponentfunktsiooniks[1].

Nälteks

funktsioonid $y = 2^x$, $y = 0{,}6^x$, $y = 2{,}34^x$, $y = 5 \cdot 0{,}9^x$, $y = -4 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^x$ on eksponentfunktsioonid.

Edaspidi piirdume põhiliselt funktsioonidega kujul $y = a^x$.

[1] *Exponere* (lad. k.) – välja panema, näitama.

Eksponentfunktsiooni *määramispiirkonnaks* on kogu reaalarvude hulk R, s. t. $-\infty < x < +\infty$.

Vaatleme eksponentfunktsiooni $y = a^x$ omadusi.

1. Eksponentfunktsiooni positiivsuspiirkond ühtib tema määramispiirkonnaga R, negatiivsuspiirkond puudub.

See on tõepoolest nii, sest $a > 0$ korral on reaalarvulise astendajaga aste a^x alati positiivne.

2. Eksponentfunktsioonil puuduvad nullkohad.

Nimetatud omadus järeldub otseselt eelnevast omadusest.

3. Eksponentfunktsiooni graafik läbib punkti *A*(0; 1).

Tõepoolest, kui $x = 0$, siis $y = a^0 = 1$.

4. Kui $a > 1$, siis eksponentfunktsioon on kasvav; kui $0 < a < 1$, siis eksponentfunktsioon on kahanev.

See omadus järeldub artiklis 3.1 esitatud teoreemist: kui $r_1 < r_2$ ($r_1, r_2 \in \mathbf{R}$), siis $a > 1$ korral on $a^{r_1} < a^{r_2}$, $0 < a < 1$ korral on $a^{r_1} > a^{r_2}$.

5. Kui $a > 1$, siis argumendi x ($x \in \mathbf{R}$) väärtuste tõkestamatul kasvamisel kasvavad ka funktsiooni $y = a^x$ väärtused tõkestamatult.

Öeldu järeldub omadusest 4 ja sellest, et jada, mille üldliige on a^n ($a > 1$, $n \in \mathbf{N}$), väärtused kasvavad kuitahes suureks.

Kui $a > 1$ ja argumendi x ($x \in \mathbf{R}$) väärtused järjest vähenevad (s. t. saavad absoluutväärtuselt järjest suuremaid, kuid negatiivseid väärtusi), siis funktsiooni väärtused a^x lähenevad tõkestamatult nullile.

Näide 1.

Kui $y = 5^x$, siis andes argumendile x järjest väiksemaid (ka negatiivseid) väärtusi, saame järjest väiksemad funktsiooni väärtused (om. 4): kui x on 2; –3; –8, on 5^x väärtused 25; 0,008; 0,00000256.

Järelikult, liikudes koordinaatteljestikus paremalt vasakule (argumendi väärtused vähenevad), langeb pidevalt funktsiooni $y = a^x$, kus $a > 1$, graafik ning läheneb tõkestamatult x-teljele. Viimast graafik seejuures kunagi ei lõika, sest vastasel juhul oleks funktsioonil nullkoht olemas.

Sirget, millele funktsiooni graafik (joon) tõkestamatult läheneb, kui argumendi väärtused tõkestamatult kasvavad või tõkestamatult kahanevad, nimetatakse selle funktsiooni graafiku (joone) **asümptoodiks**[1]. Seega on funktsiooni $y = a^x$, kus $a > 1$, graafiku asümptoodiks x-telg.

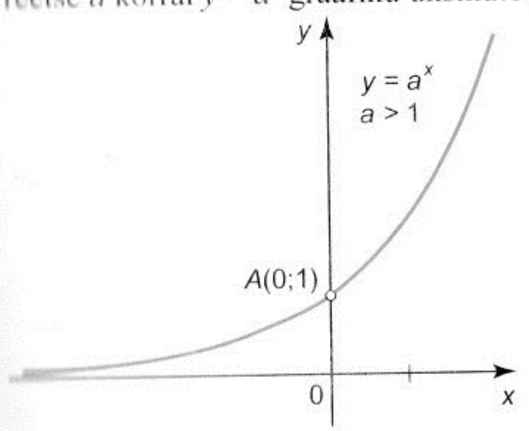
Arvestades omadusi 1.–5. võime skitseerida eksponentfunktsiooni $y = a^x$, $a > 1$ graafiku (joon. 3.2). See osutub pidevaks jooneks, s. t. jooneks, mida saab joonestada kirjutusvahendit paberilt tõstmata. Seda öeldakse ka teisiti: eksponentfunktsioon $y = a^x$, $a > 1$ on pidev funktsioon. Eksponentfunktsiooni $y = a^x$, $a > 1$ *muutumispiirkond* $Y = \mathbf{R}^+$.

Omadus 5 on eksponentfunktsiooni $y = a^x$, $0 < a < 1$ korral järgmine:

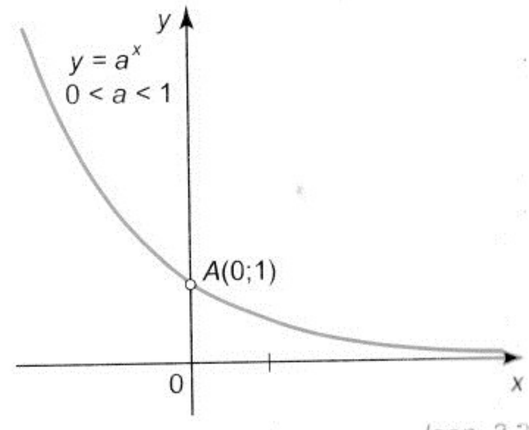
kui $y = a^x$ ja $0 < a < 1$, siis 1) argumendi x väärtuste tõkestamatul kasvamisel funktsiooni väärtused vähenevad ja lähenevad tõkestamatult nullile, 2) argumendi x väärtuste tõkestamatul vähenemisel kasvavad funktsiooni väärtused kuitahes suureks.

Omaduste 1.–5. põhjal võime skitseerida eksponentfunktsiooni $y = a^x$, $0 < a < 1$ graafiku (joon. 3.3), mis on samuti pidev joon. Ka nüüd on funktsiooni graafiku asümptoodiks x-telg. Funktsiooni $y = a^x$, $0 < a < 1$ *muutumispiirkond* $Y = \mathbf{R}^+$.

Tuginedes eksponentfunktsiooni graafiku pidevusele konstrueerime konkreetse a korral $y = a^x$ graafiku üksikute punktide kaudu.



Joon. 3.2



Joon. 3.3

Näide 2.

Konstrueerime funktsioonide $y = 2^x$ ja $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ graafikud. Selleks märgime koordinaattasandile punktid, mis vastavad järgnevas tabelis olevatele arvupaaridele, ning ühendame need punktid sujuva pideva joonega.

[1] *Asymptotos* (kreeka k.) – mittekokkulangev.

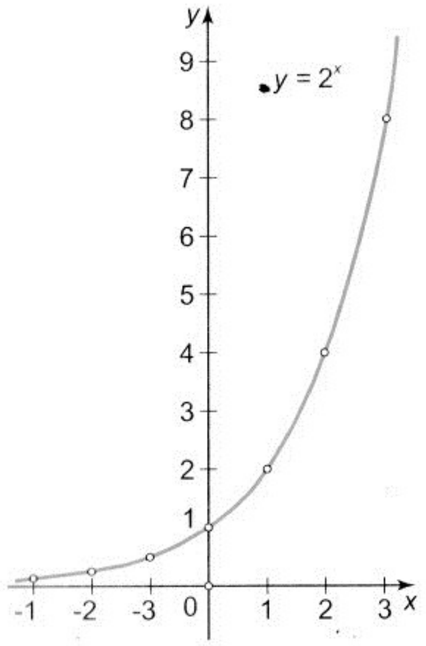
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Saadud graafikud on joonistel 3.4 ja 3.5.

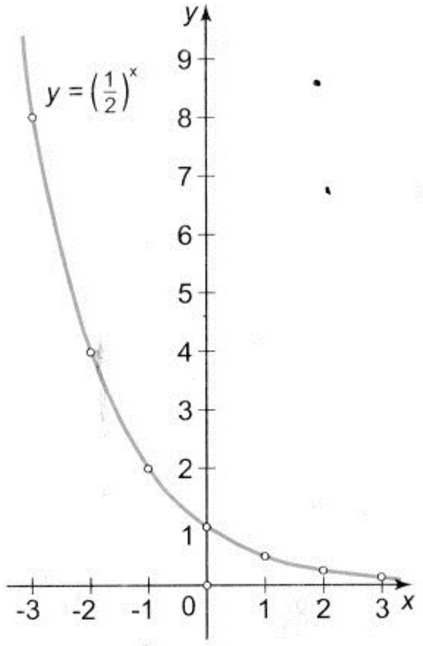
Viimane näide viib oletusele, et eksponentfunktsioonide

$y = a^x$ ja $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ graafikud on sümmeetrilised y-telje suhtes.

Selles veendumiseks näitame, et funktsiooni $y = a^x$ graafiku iga punkti $(x_0; y_0)$ korral leidub temaga y-telje suhtes sümmeetriline punkt $(-x_0; y_0)$, mis asub funktsiooni $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ graafikul. Seega teades, et $y_0 = a^{x_0}$, näitame, et $y_0 = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x_0}$. Kuna $\left(\frac{1}{a}\right)^{-x_0} = a^{x_0}$ ja $y_0 = a^{x_0}$, siis siit järeldubki, et $y_0 = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x_0}$.

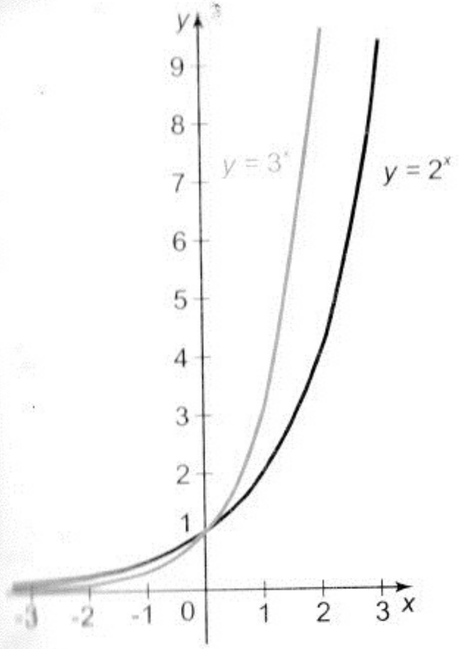


Joon. 3.4

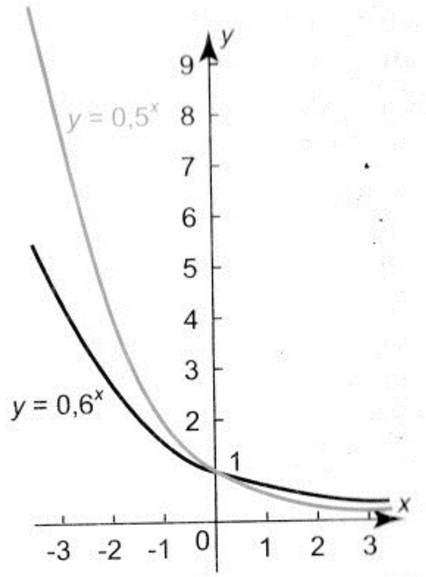


Joon. 3.5

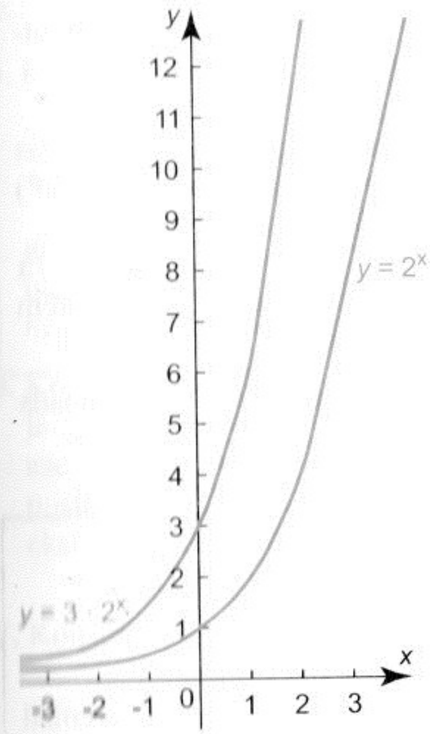
Kuidas mõjub astendatava a suurendamine $y = a^x$ graafikute vastastikusele asendile, on näha joonistelt 3.6 ($a > 1$ korral) ja 3.7 ($0 < a < 1$ korral).



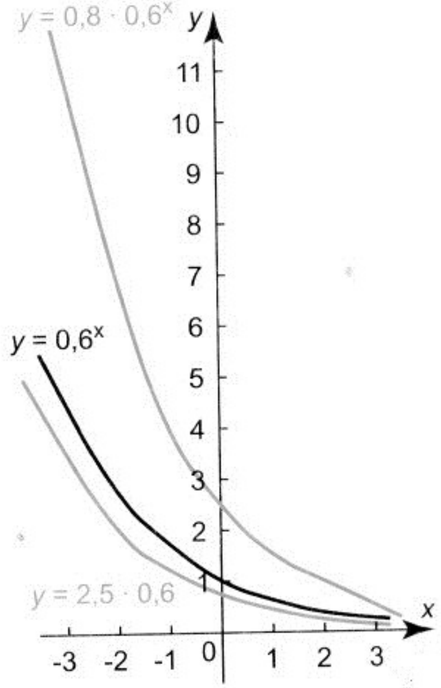
Joon. 3.6



Joon. 3.7



a)



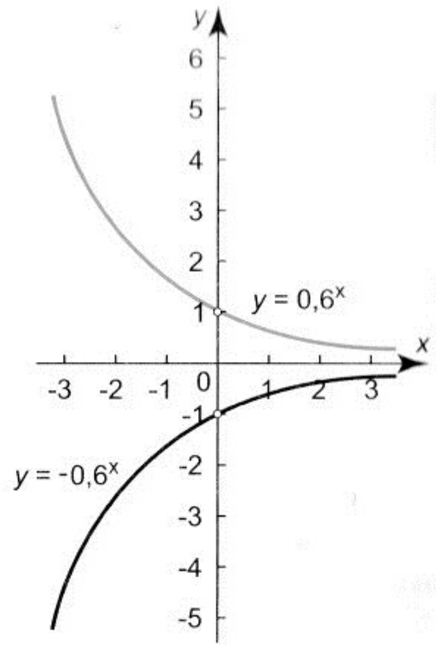
b)

Joon. 3.8

Vaatleme funktsiooni $y = c \cdot a^x$. Nagu on joonistelt 3.8 a ja b näha, tõuseb või langeb funktsiooni graafik seda järsemalt, mida suurem on positiivne kordaja c. Funktsiooni $y = -c \cdot a^x$ graafik on sümmeetriline funktsiooni $y = c \cdot a^x$ graafikuga x-telje suhtes (joon. 3.9).

Kui mingi suurus y kasvab või kahaneb seose $y = a^x$ järgi, siis öeldakse, et selle suuruse kasvamine ($a > 1$) või kahanemine ($0 < a < 1$) on **eksponentsiaalne**. Seega on ka suuruste liitprotsendiline kasvamine ning kahanemine eksponentsiaalne kasvamine või vastavalt kahanemine.

Artikli 3.1 näites 8 lahendasime võrratused 1) $0{,}6^x > 0{,}6^5$ ja 2) $1{,}3^{x+1} < 1{,}3^2$, tuginedes teatud teoreemile reaalarvulise astendajaga astmete kohta. Selliseid võrratusi saab aga lahendada ka eksponentfunktsioonide graafikutele tuginedes.



Joon. 3.9

Näide 3.

Lahendame võrratused 1) $0{,}6^x > 0{,}6^5$ ja 2) $1{,}3^{x+1} < 1{,}3^2$ vastavate eksponentfunktsioonide graafikute abil.

Lahendus.

1) Funktsioon $y = 0{,}6^x$ on kahanev kogu määramispiirkonna ulatuses, sest $a = 0{,}6 < 1$ (joon. 3.7). Seega vastab suuremale funktsiooni väärtusele ($0{,}6^x$) väiksem argumendi väärtus (x). Tähendab, $x < 5$. Võrratus ongi lahendatud.

2) Antud võrratuse saab kirjutada kujul $1{,}3 \cdot 1{,}3^x < 1{,}3^2$ ehk $1{,}3^x < 1{,}3^1$. Et $a = 1{,}3 > 1$, siis on funktsioon $y = 1{,}3^x$ kasvav. See tähendab, et suurem funktsiooni väärtus vastab suuremale argumendi väärtusele. Järelikult $x < 1$.

Erinevate eksponentfunktsioonide graafikute võrdlemise teel saab lahendada ka keerulisemaid võrratusi.

Näide 4.

Lahendame võrratused 1) $2^x > 3^x$ ja 2) $2^x > \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Lahendus.

1) Jooniselt 3.6 on näha, et funktsiooni $y = 2^x$ väärtused on suuremad funktsiooni $y = 3^x$ väärtustest ($y = 2^x$ graafik asub kõrgemal kui $y = 3^x$ graafik), kui $x < 0$. 2) Jooniseid 3.4 ja 3.5 võrreldes näeme analoogiliselt, et $x > 0$.

Neid võrratusi saab lahendada ka näite 3 eeskujul. 1) Selleks jagame esimese võrratuse positiivse suurusega 3^x. Tulemusena saame võrratuse $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$ ehk $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^0$. Viimase võrratuse lahendamine toimubki näite 3 eeskujul; $x < 0$.

Võrratuse $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$ oleks võinud lahendada ka funktsiooni $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ graafiku abil, leides argumendi x väärtuste piirkonna, mille korral funktsiooni väärtused on suuremad kui 1.

2) Võrratuse $2^x > \left(\frac{1}{2}\right)^x$ jagame positiivse suurusega $\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Tulemusena saame võrratuse $4^x > 1$ ehk $4^x > 4^0$. Nüüd leiame näite 3 eeskujul, et $x > 0$. Tõlgendades võrratuse $4^x > 1$ lahendamist funktsiooni $y = 4^x$ graafikult piirkonna leidmisena, kus funktsiooni väärtused on suuremad kui 1, saaks lahendi $x > 0$ ka kiiremini kui näitele 3 tuginedes.

A

315. Konstrueerige ühes ja samas koordinaatteljestikus funktsioonide $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ ja $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ graafikud. Kuidas mõjub astmealuse $a < 1$ muutumine graafiku asendile teljestikus? Milline on nende funktsioonide korral määramispiirkond, positiivsuspiirkond, negatiivsuspiirkond, kasvamisvahemik, kahanemisvahemik, ekstreemumkohad?

316. Konstrueerige ühes ja samas koordinaatteljestikus funktsioonide $y = 2^x$, $y = 3{,}5^x$ ja $y = 10^x$ graafikud. Kuidas mõjub astmealuse $a > 1$ muutumine graafiku asendile teljestikus? Milline on nende funktsioonide korral määramispiirkond, positiivsuspiirkond, negatiivsuspiirkond, kasvamisvahemik, kahanemisvahemik, ekstreemumkohad?

317. Konstrueerige ühes ja samas koordinaatteljestikus funktsioonide $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ja $y = 3^x$ graafikud. Milline on nende funktsioonide graafikute omavaheline asetus?

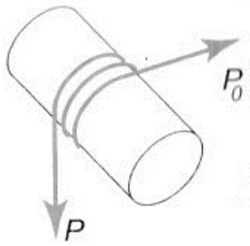
318. Lahendage võrratus:

1) $3^x > 3^6$; 2) $10^x > 100$; 3) $0{,}8^x > 0{,}8^5$;
4) $2^{2x} < 64$; 5) $0{,}5^x < 0{,}5^3$; 6) $10^{x+1} < 100$;
7) $0{,}1^3 < 0{,}1^x$; 8) $4^x > 16$; 9) $11^{x+1} > 121$;
10) $8 \cdot 2^{2x-3} < 4^3$; 11) $0{,}36 \cdot 0{,}6^x < 0{,}36^{x-1}$; 12) $100 \cdot 10^5 > 100^{x-2,5}$;

13) $0{,}008 > 0{,}2^{x-3}$; 14) $3 \cdot 2^x > 2^x$; 15) $0{,}7 \cdot 4^x > 4^x$;

16) $3^x > 2^x$; 17) $5^x < 3^x$; 18) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2^x$.

319. Terastross on mähitud terasest silindrile (joon. 3.10). Hõõrdejõuga P_0 on võimalik tasakaalustada P_0-st suuremat jõudu P. Jõudude P ja P_0 vaheline sõltuvus avaldub kujul $P = P_0 \cdot 3^n$, kus n on trossi keerdude arv silindril. Leidke, millist koormust on võimalik tasakaalustada jõuga $P_0 = 5$ N, kui trossi keerdude arv silindril on 0,5; 1; 1,25; 2; 3. Kui suure jõuga saab tasakaalustada koormust $P = 300$ N tingimusel, et trossi keerdude arv silindril on 1; 1,5; 2; 3; 4; 5?



Joon. 3.10

320. Pärmivabrikus on pandud kasvama 90 kg pärmi. Kui palju pärmi on 2; 3,5; 6; 8 ja 9 tunni möödudes, eeldades, et pärmi kogus kasvab seaduse $p = p_0 \cdot 1{,}2^t$ järgi, kus p_0 on pärmi esialgne kogus ja t aeg tundides? Konstrueerige pärmi kasvamist kirjeldava funktsiooni $p = 90 \cdot 1{,}2^t$ graafik ajavahemikus 0 kuni 9 tundi.

B

321. Joonestage koordinaatteljestikku 1) $y = 1{,}5^x$ graafik, 2) $y = 0{,}55^x$ graafik. Konstrueerige samale joonisele vastavalt 1) $y = 1{,}5^x + 2$ ja $y = 1{,}5^x - 3$ graafik, 2) $y = 0{,}55^x + 1$ ja $y = 0{,}55^x - 1$ graafik. Milline on 1) funktsioonide $y = 1{,}5^x + 2$ ja $y = 1{,}5^x - 3$, 2) funktsioonide $y = 0{,}55^x + 1$ ja $y = 0{,}55^x - 1$ määramispiirkond, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, kasvamis- ja kahanemisvahemik ning millised on ekstreemumkohad?

322. Funktsiooni $y = cf(x)$, $c > 0$, väärtused on c korda suuremad kui vastavad $y = f(x)$ väärtused. Seega tuleb $y = cf(x)$ graafiku punktid märkida x-teljest c korda kaugemale, kui $y = f(x)$ punktid. Joonestage koordinaatteljestikku $y = 1{,}4^x$ graafik ning $y = 3 \cdot 1{,}4^x$ ja $y = \frac{1}{2} \cdot 1{,}4^x$ graafik.

323. Konstrueerige eelmises ülesandes saadud joonise põhjal funktsiooni $y = -3 \cdot 1{,}4^x$ ja $y = -\frac{1}{2} \cdot 1{,}4^x$ graafik. Milline on nende funktsioonide korral määramispiirkond, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, kasvamis- ja kahanemisvahemik ning millised on ekstreemumkohad?

324. Veenduge, et eksponentfunktsiooni $y = c \cdot a^x$, kus $x \in \{0; 1; 2; \ldots\}$ väärtuste jada on geomeetriline jada. Milline on selle jada esimene liige, jada tegur ja

n-nda liikme avaldis? Leidke funktsiooni $y = 0{,}2 \cdot 2^x$, kus $x \in \{0; 1; 2; \ldots\}$ väärtuste jada kümne esimese liikme summa. Kas eksponentfunktsiooniga $y = c \cdot a^x$, $x \in \{0; 1; 2; \ldots\}$ määratud geomeetrilise jada liikmed saavad olla 1) negatiivsed, 2) vahelduvate märkidega? Kunas? Milline on geomeetrilise jada esimene liige, tegur ja üldliige siis, kui funktsiooni $y = c \cdot a^x$ määramispiirkond on $\{1; 2; 3; \ldots\}$?

325. Milliste suuruste c ja a korral on funktsiooni $y = c \cdot a^x$, $x \in \mathbf{Z}^+$, väärtuste jada 1) tõkestamatult kasvav, 2) hääbuv?

326. Kirjutage välja funktsiooni $y = ca^x$, $x \in \mathbf{Z}^+$ väärtuste jada. Leidke tekkinud geomeetrilise jada esimene liige ja tegur, kui

1) $y = 4^x$; 2) $y = 2 \cdot 3^x$; 3) $y = -3 \cdot 2^x$;

4) $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$; 5) $y = 100 \cdot 0{,}2^x$; 6) $y = -0{,}5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x$.

327. Kirjutage eelmise ülesande andmetel valem geomeetrilise jada n esimese liikme arvutamiseks. Kui jada on hääbuv, leidke ka jada kõigi liikmete summa.

328. On antud geomeetriline jada 2; 14; 98; … . Leiame sellele geomeetrilisele jadale vastava eksponentfunktsiooni. Et $a_1 = 2$ ja $q = 7$, siis $y = 2 \cdot 7^x$, kus $x \in \{0; 1; 2; \ldots\}$ või $y = \frac{2}{7} \cdot 7^x$, kus $x \in \{1; 2; 3; \ldots\}$. Et eksponentfunktsiooni korral $a > 0$, siis vahelduvate märkidega geomeetrilisele jadale, näiteks –5; 10; –20; …, eksponentfunktsiooni ei vasta (näiteks $a = q = -2 < 0$ korral).

Leidke antud geomeetrilisele jadale vastav eksponentfunktsioon, kui see on olemas:

1) 1; 5; 25; …; 2) –64; –32; –16; …;

3) 14; 10; $7\frac{1}{7}$; …; 4) 3; –6; 12; … .

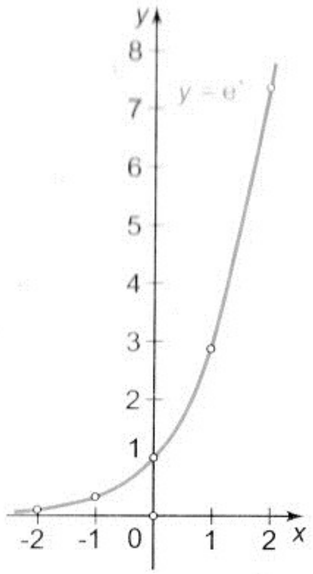
329. Milline järgmistest jadadest on geomeetriline jada? Nende korral leidke vastav eksponentfunktsioon, kui see on olemas:

1) 6; 6; 6; …; 2) 5; 0; 0; …; 3) 6; –6; 6; …;

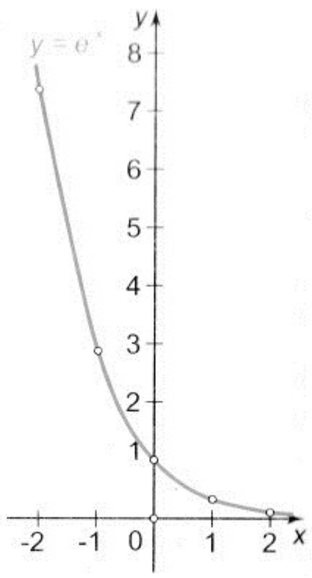
4) 101; 202; 303; …; 5) 1; 2; 3; …; 6) 10; 100; 1000; … .

3.4. EKSPONENTFUNKTSIOON $y = e^x$

Mitmete elunähtuste kirjeldamisel esineb eksponentfunktsioon, mille aluseks on arv e või selle pöördväärtus e^{-1}. Funktsioonidel $y = e^x$ (joon. 3.11) ja $y = (e^{-1})^x$ ehk $y = e^{-x}$ (joon. 3.12) on samad omadused, mis üldiselt funktsioonil $y = a^x$, kui $a > 1$ ja $0 < a < 1$.



Joon. 3.11



Joon. 3.12

Funktsioonide $y = e^x$ ja $y = e^{-x}$ väärtusi saab leida vastavatest tabelitest või taskuarvuti abil, millel on klahv $\boxed{e^x}$. Selle kasutamine on analoogiline klahvi $\boxed{10^x}$ kasutamisega.

Näide 1.

Aste $e^{4,014}$ arvutatakse skeemi kohaselt 4,014 $\boxed{e^x}$; $e^{4,014} = 55,3679$. Skeemi 0,0001 $\boxed{+/-}$ $\boxed{e^x}$ järgi arvutades saadakse, et $e^{-0,0001} = 0,9999$.

Näide 2.

Summa $e^{2,5} + e^{-0,201}$ arvutatakse tavaliselt skeemi järgi 2,5 $\boxed{e^x}$ $\boxed{+}$ 0,201 $\boxed{+/-}$ $\boxed{e^x}$ $\boxed{=}$, tulemuseks on 13,0004.

Näite 2 eeskujul saab arvutada $e^{x_1} - e^{x_2}$, $e^{x_1} \cdot e^{x_2}$ ja $e^{x_1} : e^{x_2}$. Kahel viimasel juhul võib tulemuse leida ka avaldiste $e^{x_1+x_2}$ ja $e^{x_1-x_2}$ järgi.

A

330. Arvutage
1) e^2; 2) $e^{5,03}$; 3) $e^{0,45}$; 4) $e^{1,258}$;
5) e^{-1}; 6) $e^{-1,3}$; 7) $e^{-0,08}$; 8) e^{-9};
9) $\sqrt[7]{e}$; 10) $\sqrt{e}$; 11) $\sqrt[7]{e}$; 12) $\sqrt[4]{e}$;
13) $\sqrt{e^3}$; 14) $\sqrt[5]{e^2}$; 15) $\sqrt[4]{e^{-3}}$; 16) $\sqrt[7]{e^{4,04}}$.

331. Arvutage
1) $e^{0,76 \cdot 1,7 - 2,56}$; 2) $e^{55 \cdot 0,083 + 14,72}$;
3) $216,3 \cdot e^{-4}$; 4) $0,264 \cdot \sqrt[3]{e} + 5,606$.

332. Arvutage
1) $e^5 \cdot e^2$; 2) $e^{4,3} : e^{-1,7}$; 3) $(e^{0,85})^2$;
4) $e^{\sqrt{3}} \cdot e^{2\sqrt{3}}$; 5) $e^{2+\sqrt{5}} : e^{1+\sqrt{5}}$; 6) $(e^{\sqrt{6}})^{2\sqrt{6}}$;
7) $2^e \cdot 5^e$; 8) $7^{2e} : 7^{3e}$; 9) $(4^e)^3$.

333. Konstrueerige järgmise funktsiooni graafik:
1) $y = 2e^x$; 2) $y = 0,6e^x$; 3) $y = e^{x-2}$.

334. Selgitage, kumb on suurem, kas
1) e^3 või e^5; 2) $e^{0,2}$ või $e^{0,4}$;
3) e^8 või $e^{-0,08}$; 4) e^{-3} või e^{-2}.

335. Lahendage võrratus
1) $e^x < e^8$; 2) $e^x > 1$; 3) $e^x > e$;
4) $e^x < e^{0,66}$; 5) $e^{-x} > e^{-4}$; 6) $e^{-x} < e^{-1,1}$;
7) $2e^x > e^x$; 8) $e^x < 5^x$; 9) $e^{-x} < 4^x$.

336. Lahendage võrrand
1) $e^{2x} = e^8$; 2) $e^{3x-1} = 1$; 3) $e^{4-3x} = e^7$;
4) $e^{-x} = e^3$; 5) $e^{2x-2} = 0$; 6) $e^{2x+3} = e^{2+2x}$.

337. Leidke funktsiooni $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ määramispiirkond, nullkohad, positiivsuspiirkond ja negatiivsuspiirkond. Konstrueerige funktsiooni graafik vahemikus $-3,5 < x < 3,5$. Saadud joont nimetatakse **aheljooneks**, sest selle joone kuju võtab raske ahel (kett), mis on kinnitatud kahest otsast. Milline on selle funktsiooni muutumispiirkond, kasvamis- ja kahanemisvahemik?

338. Eelmises ülesandes antud funktsiooni graafik meenutab mõneti parabooli. Et näha aheljoone ja parabooli erinevusi, konstrueerige eelmise ülesande joonisele ka $y = x^2 + 1$ graafik. Milliseid erinevusi märkate? Kumb graafikutest ja millises piirkonnas tõuseb (langeb) järsemalt?

339. Õhurõhk P (mm elavhõbedasammast) sõltub kõrgusest h (m merepinnast) seaduse järgi $P = 760 \cdot e^{-0,000125h}$. Arvutage õhurõhk 2000 m ja 4000 m kõrgusel merepinnast.

B

340. Teeäärse maapinna saastamist pliiga[1] (milligrammi ruutmeetri kohta aastas) arvutatakse valemi järgi

$$C = 0{,}012 \cdot A \cdot e^{-0{,}11k} + 0{,}37\sqrt[3]{A},$$

kus A on liiklustihedus (liiklusvahendite arv) ööpäevas ja k on kaugus meetrites teeservast. Konstrueerige suuruste C ja k vahelise sõltuvuse graafikud teede kohta, kus liigub ööpäevas 1000 liiklusvahendit ja 3000 liiklusvahendit (Eestis on selliseid teid umbes 2200 km). Loeme ohutu saastatuse piiriks 10 mg/m^2 pliid aastas. Kui kaugel tee servast algab ohutu piirkond kummagi liiklustiheduse korral? Mitmekordselt ületab kummalgi juhul saastatus teepeenral lubatud normi?

341. Konstrueerige eelmise ülesande andmetel suuruste A ja C vahelise sõltuvuse graafikud, kui 1) $k = 0$ m; 2) $k = 10$ m ja 3) $k = 20$ m (teede äärde, kus ööpäevas liigub rohkem kui 3000 mootorsõidukit, soovitatakse jätta 20 m laiune puhvertsoon, kus ei kasvatataks põllukultuure). Millise liiklustiheduse korral ületab saastatus lubatud piiri (10 mg/m^2) teepeenral, teest 10 m ja teest 20 m kaugusel? Andke vastus 100 auto täpsusega.

342. Kirjutage antud funktsiooniga määratud jada mõned esimesed liikmed ja üldliikme valem:

1) $y = e^x; x \in \mathbf{Z}^+$; 2) $y = 4e^x; x \in \mathbf{Z}^+$; 3) $y = e^{x-1}, x \in \mathbf{Z}^+$.

343. Joonestage koordinaatteljestikku funktsiooni $y = e^x$ graafik. Konstrueerige sellesse teljestikku ka funktsiooni 1) $y = e^x + 2$, 2) $y = e^x - 3$, 3) $y = 2 \cdot e^x$, $y = \frac{1}{3} \cdot e^x$, 4) $y = -e^x$ graafik.

3.5. EKSPONENTVÕRRAND

Eksponentvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles tundmatu esineb ainult astendajas.

Näiteks on eksponentvõrrandeiks võrrandid:

$0{,}4^{x+7} = 2^6 \cdot 5^{-6}$; $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$;

$2^{x^2-5x+6} = 1$; $2 \cdot 0{,}6^x - 0{,}6 = 3^x \cdot 5^{-x}$.

[1] Ülesandes esitatud seos pärineb Ü. Manderi artiklist "Autoteed saastekolletena", "Eesti Loodus", 1985, nr. 5, lk. 311.

Üldist võtet eksponentvõrrandite lahendamiseks ei ole. Kasutatakse mitmeid erivõtteid, mille valik sõltub võrrandi kujust. Mõningate eksponentvõrrandite lahendamisel saame kasutada asjaolu, et võrdsete alustega astmed on võrdsed vaid siis, kui astendajad on võrdsed, s. t. $a \neq 1$ korral $a^{x_1} = a^{x_2}$ ainult siis, kui $x_1 = x_2$. Sellele tuginedes lahendasime varem näiteks ülesande 286.

Näide 1.

Lahendame võrrandid 1) $8^{x+1} = 16^{-3}$ ja 2) $5^{2x^2-3x-2} = 1$.

Lahendus.

1) $8^{x+1} = 16^{-3} \Rightarrow (2^3)^{x+1} = (2^4)^{-3} \Rightarrow 2^{3x+3} = 2^{-12} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x + 3 = -12 \Rightarrow x = -5$.

2) Et $1 = 5^0$, siis $5^{2x^2-3x-2} = 5^0$, millest $2x^2 - 3x = 0$.

Siit $x_1 = -0{,}5$ ja $x_2 = 2$.

Kontroll.

1) $8^{-5+1} = 8^{-4} = 2^{-12} = 16^{-3}$. Järelikult $x = -5$ on esimese võrrandi lahend.

2) $5^{2 \cdot 0{,}25 + 1{,}5 - 2} = 5^0 = 1$; $5^{2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 2} = 5^0 = 1$. Järelikult on $x_1 = -0{,}5$ ja $x_2 = 2$ teise võrrandi lahendid.

Mõnikord õnnestub määrata mingi funktsioon $f(x)$ nii, et eksponentvõrrand osutub $a^{f(x)}$ suhtes meile tuttavaks võrrandiks. Sellisel juhul lahendame võrrandi kõigepealt $a^{f(x)}$ suhtes, millega taandame antud eksponentvõrrandi ühele või mitmele võrrandile kujul $a^{f(x)} = b$.

Näide 2.

Lahendame võrrandid

1) $3^{2x-1} - 3^{x-1} - 2 = 0$ ja 2) $5^{8x+9} - 5^{4x+6} = 0$.

Lahendus.

1) $3^{2x-1} - 3^{x-1} - 2 = 0 \Rightarrow 3^{2x} \cdot 3^{-1} - 3^x \cdot 3^{-1} - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{2x} - 3^x - 6 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 3^x - 6 = 0$.

Viimane on ruutvõrrand 3^x suhtes ning

$3^x = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 6}$ ehk $3^x = 3$ ja $3^x = -2$.

Võrrand $3^x = -2$ on vastuoluline, sest eksponentfunktsiooni väärtus ei saa kunagi olla negatiivne. Seega ainsa lahendi saame võrrandist $3^x = 3$; $x = 1$.

2) Võrrandit $5^{8x+9} - 5^{4x+6} = 0$ võib lahendada analoogiliselt eelneva võrrandiga, kuid seda saab lahendada ka järgmiselt. Võtame võrrandi vasakul poolel sulgude ette 5^{4x+6}, millega võrrand omandab kuju

$5^{4x+6}(5^{4x+3} - 1) = 0$.

Et tundmatu x iga väärtuse korral $5^{4x+6} \neq 0$, siis peab olema $5^{4x+3} - 1 = 0$ ehk $5^{4x+3} = 1$. Et $1 = 5^0$, siis $4x + 3 = 0$ ehk $x = -0{,}75$.

Vastus. 1) $x = 1$; 2) $x = -0{,}75$.

A

344. Lahendage võrrand

1) $5^{2x}=625$; 2) $4^x=64$; 3) $0{,}1^{10-x}=10^{3x-4}$;

4) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x-1}=5$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4-x}=3^x$; 6) $\sqrt{e^x}=e^{-0{,}8}$;

7) $e^{0{,}3x}=e^{-3{,}6}$; 8) $4^{\sqrt{2x}}=0{,}25$; 9) $8^{2x}=1$;

10) $3^{x-2}=3^{-2}$; 11) $3^{x+1}=\sqrt{9^{x+1}}$; 12) $0{,}9^{x^2-2}=1$;

13) $2^{2-x}=3^{2-x}$; 14) $3^{4-x}=5^{x-4}$; 15) $\sqrt[4]{2^{x+1}}=\sqrt[3]{2^{x-2}}$.

345. Lahendage võrrand

1) $2^{2x}-8\cdot 2^x+16=0$; 2) $3^{2x}-10\cdot 3^x+9=0$;

3) $5^{2x}+5^x-20=0$; 4) $4\cdot 4^{2x}-9\cdot 4^x+2=0$;

5) $4^x-10\cdot 2^x+24=0$; 6) $2^{2x}-3\cdot 2^{x+1}+8=0$;

7) $3^{x+1}+3^x=108$; 8) $7^{2x}+2\cdot 7^x=-4$;

9) $5^x+3\cdot 5^{x-2}=140$; 10) $4^{2x+1}-4^{x+2}=0$;

11) $9^x-3^x=2$; 12) $2^x-2^{x-2}-3=0$.

346. Lahendage võrrand

1) $2^{3^x}=512$; 2) $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=13$;

3) $e^{4x}=e^{8-6x}$; 4) $\sqrt{3^x}\cdot\sqrt{5^x}=225$;

5) $125\cdot 2^x=8\cdot 5^x$; 6) $10^x(101-10^x)=100$.

B

347. Lahendage võrrand

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$; 2) $3^{x^2}+4^{x^2}=5^{x^2}$;

3) $50\cdot 25^x-133\cdot 10^x+20\cdot 4^x=0$; 4) $4^x+6^x=2\cdot 9^x$;

5) $98\cdot 49^x+335\cdot 14^x-28\cdot 4^x=0$; 6) $6^{x^2-7}+8^{x^2-7}=10^{x^2-7}$.

348. Lahendame võrrandi

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4.$$

Et $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=1$, siis $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

ja antud võrrand saab kuju

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{2x}-4\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+1=0.$$

Lahendades selle kui ruutvõrrandi $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x$ suhtes, saame, et $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=\left(2-\sqrt{3}\right)$, millest $x_1=2$ ja $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=\left(2+\sqrt{3}\right)$ ehk $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-2}$, millest $x_2=-2$. Lahendid on $x_1=2$, $x_2=-2$.

Lahendage võrrand

1) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10$; 2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x+\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x=6$.

3.6. ARVU LOGARITM

Võrdus $a^r=N$, kus $a>0$ ja $a\neq 1$ seob kolme arvu. Kui neist arvudest on kaks antud, saame leida kolmanda. Nii leiame arvu N arvude a ja r kaudu astendamise teel ning arvu a arvude r ja N kaudu juurimise teel: $a=\sqrt[r]{N}$.

Näiteks, kui $a=2$ ja $r=4$, siis $N=2^4=16$; kui aga $N=216$ ja $r=3$, siis $a^3=216$, millest $a=\sqrt[3]{216}=6$.

Selgitame, kuidas saab võrdusest $a^r=N$ arvude a ja N järgi leida astendajat r.

Olgu $2^r=32$. Proovimise teel leiame, et $r=5$, sest $2^5=32$. Seda tulemust kirjutatakse sümboleis järgmiselt: $r=\log_2 32=5$. Sümbolit $\log_2 32$ loetakse[1] *logaritm alusel 2* või *kahendlogaritm 32-st.*

Üldiselt: kui $a^r=N$, kus $a>0$, $a\neq 1$, siis $r=\log_a N$. Arvu $\log_a N$ tähenduse annab seejuures definitsioon:

arvu N logaritmiks alusel a nimetatakse arvu r, millega alust a astendades saadakse arv N,

s. t. $\boxed{r=\log_a N \Leftrightarrow a^r=N}$

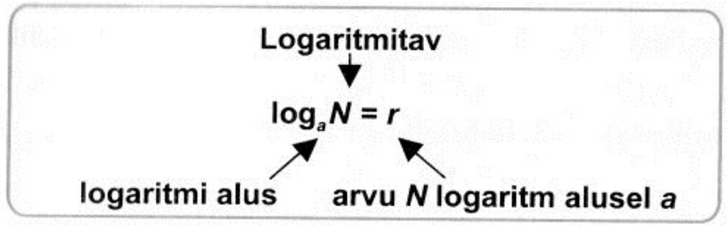
ehk $\boxed{a^{\log_a N}=N.}$

[1] *Logos* (kreeka k.) – suhe, *arithmos* (kreeka k.) – arv.

Järeldusi:

1. Logaritmi saab leida vaid positiivsest arvust, s. t. $N > 0$.
2. Logaritm logaritmi alusest on üks, s. t. $\log_a a = 1$.
3. Logaritm ühest on null, s. t. $\log_a 1 = 0$.

Arvu logaritmi mõistega seotud nimetused on järgmised:



Näide 1.

$\log_3 81 = 4$, sest $3^4 = 81$;

$\log_{10} 100 = 2$, sest $10^2 = 100$;

$\log_a a^{12} = 12$; $\log_e e^7 = 7$; $0{,}3^{\log_{0,3} 8} = 8$; $a^{\log_a 4} = 4$;

$\log_{0,5} 2 = -1$, sest $0{,}5^{-1} = 2$;

$\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$, sest $(\sqrt{2})^6 = 8$;

$2^{\log_2 5} = 5$;

$5^{2\log_5 3} = (5^{\log_5 3})^2 = 9$.

Näide 2.

Leiame logaritmitava N, kui $\log_{27} N = \frac{1}{3}$.

Arvu logaritmi mõiste kohaselt peab olema $27^{\frac{1}{3}} = N$, millest $N = \sqrt[3]{27} = 3$.

Näide 3.

Kui $\log_a 3 = \frac{1}{4}$, siis $a^{\frac{1}{4}} = 3$, millest $a = 3^4 = 81$.

Kui logaritmi alus $a = 10$, siis kirjutatakse lühiduse mõttes $\log_{10} N$ asemel $\log N$ (mõnes raamatus ka $\lg N$), mida loetakse **kümnendlogaritm *N*-st**. Kui aga logaritmi alus $a = e$, siis kirjutatakse $\log_e N$ asemel $\ln N$, mida loetakse **naturaallogaritm *N*-st** või **loomulik logaritm *N*-st**.

Näide 4.

Kui $\log N = -2$, siis $N = 10^{-2} = 0{,}01$; kui $\ln N = 2$, siis $N = e^2 \approx 7{,}39$.

Arvu N logaritme $\log N$ ja $\ln N$ leitakse taskuarvuti abil. Logaritmide $\log N$ ja $\ln N$ leidmiseks on taskuarvutil klahvid $\boxed{\text{lg}}$ või $\boxed{\text{log}}$ ja $\boxed{\text{ln}}$. Skeemid $\log N$ ja $\ln N$ arvutamiseks on järgmised:

N $\boxed{\text{log}}$ ja N $\boxed{\text{ln}}$.

Näide 5.

Suuruse $\log 0{,}00708$ arvutame skeemi 0,00708 $\boxed{\text{log}}$ järgi, tulemuseks saame $-2{,}149967$, mis tähendab, et $10^{-2,149967} = 0{,}00708$; suuruse $\ln 2783$ arvutame skeemi 2783 $\boxed{\text{ln}}$ järgi, tulemuseks saame 7,931285, mis tähendab, et $e^{7,931285} = 2783$.

140. Kirjutage logaritmisümboli abil võrdus

1) $10^2 = 100$; 2) $5^4 = 625$; 3) $16^{0,25} = 2$;

4) $64^{\frac{1}{2}} = 8$; 5) $11^3 = 1331$; 6) $12^2 = 144$;

7) $4^{-2} = \frac{1}{16}$; 8) $5^{-2} = 0{,}04$; 9) $3^{-4} = \frac{1}{81}$.

141. Leidke

1) $\log_2 8$; 2) $\log_5 25$; 3) $\log_3 3$;

4) $\log 10^3$; 5) $\log 0{,}01$; 6) $\log 1$;

7) $\ln e^{-2}$; 8) $\ln e^4$; 9) $\ln e$;

10) $\log_{\sqrt{3}} 3$; 11) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{32}$; 12) $\log_{\sqrt{5}} 5^{-2}$;

13) $\log_{\frac{1}{9}} 9$; 14) $\log_{\frac{4}{5}} 0{,}64$; 15) $\log_{0,35} 0{,}1225$;

16) $\log \sqrt{10}$; 17) $\log_5 \sqrt[3]{25}$; 18) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[7]{81}$.

142. Leidke arv N, kui

1) $\log_3 N = 4$; 2) $\log_2 N = 6$; 3) $\log_4 N = 3$;

4) $\log_{1,5} N = 2$; 5) $\log_{\sqrt{3}} N = 4$; 6) $\log_{0,4} N = 4$;

7) $\log_5 N = -3$; 8) $\log_2 N = -5$; 9) $\log_{\sqrt{5}} N = -6$;

10) $\log N = 5$; 11) $\log N = 1{,}5$; 12) $\log N = -3$;

13) $\ln N = -3$; 14) $\ln N = 0$; 15) $\ln N = -1$.

143. Leidke arv a, kui

1) $\log_a 8 = 3$; 2) $\log_a 10 = 1$; 3) $\log_a 8 = 6$;

4) $\log_a \frac{1}{64} = 5$; 5) $\log_a 0{,}008 = 3$; 6) $\log_a 3 = 2$;

7) $\log_a r^4 = 4$; 8) $\log_a e^5 = 5$; 9) $\log_a r = 5$;

10) $\log_a 2 = -1$; 11) $\log_a 100 = -2$; 12) $\log_a 1 = 0$.

353. Arvutage

1) $5^{\log_5 3}$; 2) $4^{\log_4 1}$; 3) $0,21^{\log_{0,21} 5}$;
4) $3^{-\log_3 2}$; 5) $12^{-\log_{12} 1,9}$; 6) $2^{3\log_8 5}$;
7) $3^{2\log_9 4}$; 8) $9^{0,5\log_3 7}$; 9) $2^{3\log_2 5}$;
10) $5^{4\log_5 2}$; 11) $6^{2+\log_6 3}$; 12) $0,8^{\log_{0,8}(\sqrt{2}+1)}$;
13) $2^{3-\log_2 5}$; 14) $10^{\log 11}$; 15) $10^{2+\log 1,5}$;
16) $e^{\ln 103}$; 17) $e^{\ln 2+\ln 9}$; 18) $2^{\log_2 10-\log_2 3}$.

354. Leidke

1) $\log 0,04572$; 2) $\ln 2,073$; 3) $\log 100$;
4) $\log 2346,25$; 5) $\ln 0,054$; 6) $\log 0,001$;
7) $\log 1,6\cdot 10^{-6}$; 8) $\ln 444,9$; 9) $\log 0,01$;
10) $\log 618390$; 11) $\ln 0,003$; 12) $\ln 1$.

355. Leidke arv x, kui

1) $\log x = 1,8945$; 2) $\ln x = 3,0525$;
3) $\log x = 3,72$; 4) $\ln x = 0,0463$;
5) $\log x = 0,3010$; 6) $\ln x = -1,5$;
7) $\log x = -5,4$; 8) $\ln x = -11,3$.

356. Kirjutage arvu 10 ja arvu e astmena arv

1) 125; 2) 1,25; 3) 125000;
4) 0,00125; 5) 0,125, 6) 0,0125;
7) 5,6709; 8) 12,72; 9) 456781;
10) $2,4\cdot 10^5$; 11) $7,09\cdot 10^{-9}$; 12) $3,57\cdot 10^7$;
13) –27,53; 14) –0,0002; 15) –6,789.

3.7. AVALDISE LOGARITMIMINE JA POTENTSEERIMINE

Tõestame mõned teoreemid, mis väljendavad logaritmide omadusi. Tuletame seejuures meelde, et logaritmi saab leida vaid positiivsest arvust, tähendab, järgmised seosed kehtivad vaid positiivsete logaritmitavate korral.

Teoreem 1. **Korrutise logaritm võrdub tegurite logaritmide summaga, s. t.**
$\log_a N_1N_2 = \log_a N_1 + \log_a N_2$.

Tõestus.
Olgu $\log_a N_1 = r_1$ ja $\log_a N_2 = r_2$. Siis $N_1 = a^{r_1}$ ja $N_2 = a^{r_2}$ ning
$N_1N_2 = a^{r_1}\cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$.
Logaritmi definitsiooni põhjal saame võrdusest $N_1N_2 = a^{r_1+r_2}$, et
$\log_a N_1N_2 = r_1 + r_2 = \log_a N_1 + \log_a N_2$. ■

Näide 1.

Arvutame log 200, kui on teada, et log 2 = 0,3010. Et $200 = 2\cdot 100$, siis
$\log 200 = \log(2\cdot 100) = \log 2 + \log 100 = 0,3010 + 2 = 2,3010$.

Teoreem 2. **Jagatise logaritm võrdub jagatava ja jagaja logaritmide vahega, s. t.**
$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$.

Tõestus.
Olgu endiselt $\log_a N_1 = r_1$ ja $\log_a N_2 = r_2$, s. t. $N_1 = a^{r_1}$ ja $N_2 = a^{r_2}$. Siis
$\frac{N_1}{N_2} = \frac{a^{r_1}}{a^{r_2}} = a^{r_1-r_2}$.
Logaritmi definitsiooni põhjal saame võrdusest $\frac{N_1}{N_2} = a^{r_1-r_2}$, et
$\log_a \frac{N_1}{N_2} = r_1 - r_2 = \log_a N_1 - \log_a N_2$. ■

Näide 2.

Arvutame log 0,0002, kui on teada, et log 2 = 0,3010. Et $0,0002 = 2:10000$, siis
$\log 0,0002 = \log\frac{2}{10000} = \log 2 - \log 10000 = 0,3010 - 4 = -3,6990$.

Teoreem 3. **Astme logaritm võrdub astendaja ja astme aluse logaritmi korrutisega, s. t.**
$\log_a N^c = c\log_a N$.

Tõestus.
Olgu $\log_a N = r$, siis $N = a^r$ ning $N^c = a^{cr}$. Logaritmi definitsiooni põhjal saame viimasest võrdusest, et $cr = \log_a N^c$ ehk
$\log_a N^c = c\log_a N$. ■

Näide 3.

Arvutame $\log\sqrt[3]{2}$, kui on teada, et $\log 2 = 0{,}3010$. Et $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$, siis

$$\log\sqrt[3]{2} = \log 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log 2 = \frac{0{,}3010}{3} = 0{,}1003.$$

Saadud valemeid kasutatakse ka **avaldiste logaritmimisel**, s. t. avaldiste logaritmide avaldamisel neis esinevate suuruste logaritmide kaudu.

Näide 4.

Logaritmime avaldise y alusel a, kui

$y = \dfrac{49x^3}{8u^5\sqrt[3]{v^2}}$ ja $x, u, v > 0$:

$$\log_a y = \log_a \frac{49x^3}{8u^5\sqrt[3]{v^2}} = \log_a 49x^3 - \log_a 8u^5\sqrt[3]{v^2} =$$

$$= \log_a 49 + \log_a x^3 - (\log_a 8 + \log_a u^5 + \log_a v^{\frac{2}{3}}) =$$

$$= 2\log_a 7 + 3\log_a x - 3\log_a 2 - 5\log_a u - \frac{2}{3}\log_a v.$$

Näide 5.

Arvutame avaldise $4u^4v^5$ kümnendlogaritmi, kui on teada, et $\log 2 = 0{,}301$, $\log u = 2{,}5$ ja $\log v = -3$.

$$\log 4u^4v^5 = \log 4 + \log u^4 + \log v^5 = 2\log 2 + 4\log u + 5\log v =$$
$$= 2\cdot 0{,}301 + 4\cdot 2{,}5 + 5\cdot(-3) = -4{,}398.$$

Näide 6.

Lahendame võrrandi $3^x = 23{,}5$.

Logaritmime antud võrduse mõlemaid pooli alusel 10. Selle tulemusena saame võrduse $x\log 3 = \log 23{,}5$, millest

$$x = \frac{\log 23{,}5}{\log 3} = \frac{1{,}371}{0{,}477} = 2{,}874.$$

Avaldise logaritmi või arvu logaritmi järgi vastava avaldise või arvu leidmist nimetatakse **potentseerimiseks**. Seejuures tuleb logaritme sisaldavate avaldiste teisendamisel sageli kasutada tuletatud valemeid n.-ö. tagurpidi.

Näide 7.

Leiame arvu x, kui $\log_9 x = 2{,}5$.

Arvu x leidmiseks potentseerime võrdust $\log_9 x = 2{,}5$. Tulemusena saame, et $x = 9^{2,5}$ ehk $x = 3^5 = 243$.

Näide 8.

Leiame avaldise z, kui

$$\log_7 z = 6\log_7 2 + 3\log_7 u + \frac{2}{3}\log_7 v - 4\log_7 w.$$

Avaldise z leidmiseks teisendame antud võrduse paremat poolt:

$$6\log_7 2 + 3\log_7 u + \frac{2}{3}\log_7 v - 4\log_7 w =$$

$$= \log_7 2^6 + \log_7 u^3 + \log_7 v^{\frac{2}{3}} - \log_7 w^4 =$$

$$= \log_7 64u^3\sqrt[3]{v^2} - \log_7 w^4 = \log_7 \frac{64u^3\sqrt[3]{v^2}}{w^4}.$$

Võrduse $\log_7 z = \log_7 \dfrac{64u^3\sqrt[3]{v^2}}{w^4}$ potentseerimisel saame:

$$z = \frac{64u^3\sqrt[3]{v^2}}{w^4}.$$

357. Logaritmige järgmist avaldist alusel a, kui kõik tähelised suurused on positiivsed:

1) xy^2, kui $a = 10$;
2) $8x^{-4}y^6$, kui $a = 2$;
3) $u^9 : c^3$, kui $a = e$;
4) $b^2(c^5b^8)$, kui $a = b$;
5) $4u\sqrt[8]{u^3v^{-2}}$, kui $a = 4$;
6) $81\sqrt[9]{u^5v^{-4}}$, kui $a = 2$;
7) $a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$;
8) a^{4n+5};
9) $u\sqrt[4]{v^3} : (v^3\sqrt[5]{u^2})$, kui $a = 3$;
10) $27x^{12}y^5z^{-3}$, kui $a = 3$.

358. Teades, et $\log 2 = 0{,}3010$ ja $\log 5 = 0{,}6990$, arvutage

1) $\log 32$;
2) $\log 0{,}04$;
3) $\log\sqrt{5}$;
4) $\log\sqrt[5]{2}$;
5) $\log\sqrt[3]{5}$;
6) $\log\sqrt[4]{2}$;
7) $\log\dfrac{2}{5}$;
8) $\log\dfrac{25}{128}$;
9) $\log\dfrac{5}{2}$;
10) $\log 12{,}5$;
11) $\log 0{,}8$;
12) $\log 31{,}25$;
13) $\log\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}}$;
14) $\log 100$;
15) $\log(2^{-7}\cdot 5^4)$;
16) $\log 2\sqrt{5}$;
17) $\log(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{5})$;
18) $\log(5\cdot\sqrt[5]{2})$.

359. Teades, et $\log 1{,}95 = 0{,}29$, leidke kümnendlogaritm arvust

1) 19,5; 2) 195; 3) 1950; 4) 19500;
5) 0,195; 6) 0,00195; 7) $1{,}95 \cdot 10^{-10}$; 8) 0,0195;
9) $1{,}95^2$; 10) $19{,}5^5$; 11) 195^3; 12) $\sqrt{19{,}5}$.

360. Leidke x, kui

1) $\log x = 0{,}51 \log a$;
2) $\log x = 3 \log a + \log b$;
3) $\log x = -\log u$;
4) $\log x = 2 \log u - 3 \log v$;
5) $\log x = 0{,}5 \log a + 5 \log b$;
6) $\log x = u \log 2 - 2 \log u$;
7) $\log x = 1 + \log b - \log a$;
8) $\log x = 3 - \log 5 - \log c$;
9) $\ln x = 5 \ln 2 + 3 \ln a$;
10) $\ln x = -4 \ln a - \ln (a + b)$;
11) $\log_7 x = \log_7 c - 91 \log_7 b$;
12) $\log_2 x = 0{,}25 \log_2 16 - \log_2 a$.

361. Lahendage võrrand

1) $\log x = 2 \log 7 + \log 2$;
2) $\log 2 - \log x = \log 3$;
3) $\log_4 x = 3\log_4 2 + \frac{2}{3}\log_4 5$;
4) $\log_2 x + 4 \log_2 3 - 1 = 0$;
5) $\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln x = \ln 6$;
6) $\ln x - \ln(x-1) = \ln 2$;
7) $5\log_2 x = 3\log_2 x + 6$;
8) $(\log_3 x)^2 + 6\log_3 x + 9 = 0$.

362. Lahendage eksponentvõrrand

1) $2^x = 80$; 2) $5^x = 1{,}7$; 3) $4^x = 0{,}033$;
4) $1{,}4^x = 9$; 5) $0{,}8^x = 5$; 6) $45^x = 1000$.

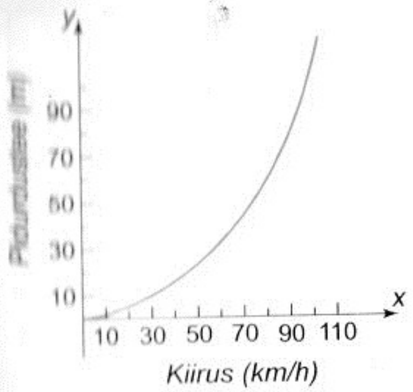
363. Lahendage eksponentvõrrand

1) $2^{4x} = 2^{3,5}$; 2) $3{,}09^x = 2{,}63^{x+1}$;
3) $2^x = 3^{5-x}$; 4) $7{,}08^{4x} = 9{,}55^{5x-5}$.

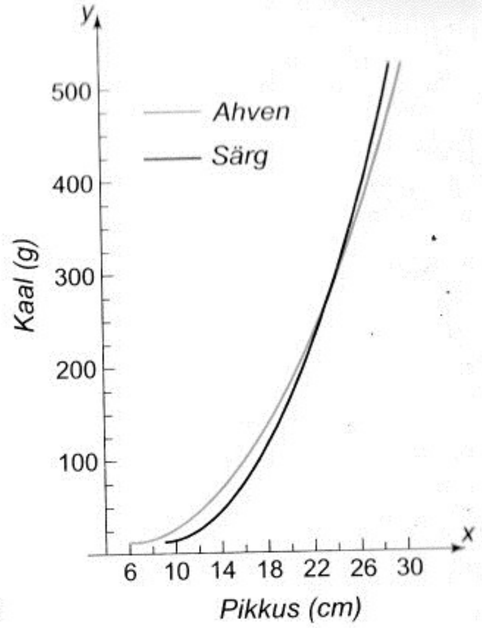
364. Elanikkonna keskmine juurdekasv aastas oli ajavahemikus 1977–1983 Austraalias 1,71%, ajavahemikus 1980–1982 Brasiilias 3,55% ja ajavahemikus 1980–1983 USA-s 0,89%. Mitme aastaga kahekordistub nendes riikides elanike arv, kui oletada, et elanikkonna kasvuprotsent jääb edaspidi muutumatuks?

365. Mitme aasta pärast saab Juhan osta 150 000 krooni maksva auto, kui ta paneb panka 12 000 krooni ja pank maksab aastas 10% intressi.

366. Auto pidurdustee sõltuvus kiirusest on esitatud joonisel 3.13. Eeldades, et seda sõltuvust saab kirjeldada funktsiooniga kujul $y = ax^b$, kus $x > 0$, leidke parameetrid a ja b. Selleks vajalikud punktide koordinaadid leidke jooniselt. Arvutage auto pidurdustee pikkus kiiruste 45 km/h, 65 km/h, 95 km/h, 120 km/h korral ning võrrelge tulemusi jooniselt saadavatega. Milline on suurim kiirus, millega võib tagumine auto sõita, kui kahe auto vahemaa on 70 meetrit?



Joon. 3.13



Joon. 3.14

367. Joonisel[1] 3.14 on kujutatud ahvenate ja särgede mõõtmisel saadud andmete põhjal nende keskmiste kaalude sõltuvus pikkusest. Eeldades, et see sõltuvus avaldub kujul $y = ax^b$, kus $x \geq 6$, leidke nii särje kui ka ahvena korral parameetrid a ja b. Arvutage kala kaal, kui kala pikkus on 15 cm; 28 cm.

368. Lahendage eelmine ülesanne eeldusel, et kalade kaalu sõltuvus pikkusest avaldub kujul $y = ca^x$, kus $x \geq 6$.

369. Veenõu koos veega, mis oli kuumutatud temperatuurini 80 °C, pandi õhu kätte jahtuma. Vee temperatuuri mõõdeti iga 10 minuti tagant. Tulemused kanti tabelisse.

Aeg (minutites)	0	10	20	30	40	50	60
Temperatuur (kraadides)	80	60	44	32,5	24	18	13

Kujutage tabeli andmete põhjal jahtuva keha temperatuuri ja aja vaheline seos graafiliselt. Eeldades, et kõnealune seos avaldub kujul $T = ae^{-bx}$, kus muutuja x on aeg ja T temperatuur, leidke parameetrid a ja b. Arvutage vee temperatuur, kui nõu koos veega on jahtunud 2; 15; 43; 50 minutit.

370. Võrdse pindalaga, kuid pinnase erineva kaldenurgaga (kraadides) metsatükilt saadav puidukogus (kuupmeetrites) on esitatud järgmises tabelis. Eeldades, et pinnase kaldenurga x ja puidukoguse y vaheline seos avaldub kujul $y = ax^b + c$, leidke parameetrid a, b ja c. Arvutage saadav puidukogus pinnase kaldenurkade korral 8°, 15°, 30°, 42°, 50°, 55°, 60°.

[1] Joonis pärineb M. Kanguri artiklist "Kala pikkuse ja kaalu vahelisest seosest", "Eesti Loodus", 1970, nr. 7, lk. 445.

Pinnase kaldenurk	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
Puidukogus	10000	9850	9400	8660	7660	6428	5000

371. Bakterite paljunemine on kirjeldatav seosega $y = y_0 e^{kt}$, kus y_0 on bakterite esialgne mass, t – paljunemise aeg ja y – bakterite mass aja t pärast. Leidke koefitsient k, kui 5 grammist bakteritest kasvas 8 tunni möödudes 140 g baktereid. Mitme tunni pärast bakterite mass kahekordistub?

B

372. Tõestage, et geomeetrilise jada liikmete logaritmid moodustavad aritmeetilise jada.

373. Positiivsete arvude x_1, x_2, …, x_n geomeetriline keskmine defineeritakse valemiga

$$\overline{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Tõestage, et antud arvude logaritmide aritmeetiline keskmine võrdub nende arvude geomeetrilise keskmise logaritmiga.

374. Leidke järgmiste arvude geomeetriline keskmine:

1) 240, 540; 2) 8, 27, 125;
3) 18, 49, 84; 4) 2, 6, 9, 12.

375. Tõestage, et

$$a^2 + b^2 = 7ab, \text{ kui } \log\frac{a+b}{3} = \frac{\log a + \log b}{2}.$$

376. Tõestage, et

$$\frac{a+1-2b}{2} = \log 5, \text{ kui } a = \log 122{,}5, \ b = \log 7.$$

3.8. * ÜLEMINEK LOGARITMI ÜHELT ALUSELT TEISELE

Eespool tutvusime arvu kümnendlogaritmi ja naturaallogaritmi leidmisega taskuarvutil. Nende logaritmide jaoks on koostatud ka vastavad tabelid. Arvu logaritmi leidmiseks mingil muul alusel tuleb aga eelnevalt üle minna alusele 10 või e.

Näide 1.

Leiame $\log_2 1000$.

Lahendus.

Nagu juba öeldud, tuleb selle logaritmi leidmiseks üle minna kas kümnend- või naturaallogaritmidele, sest ainult neile logaritmidele vastavad klahvid on taskuarvutil olemas. Läheme alusele 10. Tähistame otsitava suuruse tähega r, s.t. $\log_2 1000 = r$. Siis $1000 = 2^r$. Logaritmime saadud võrdust uuel alusel 10: $\log 1000 = r \cdot \log 2$. Siit

$$r = \frac{\log 1000}{\log 2} \text{ ehk } \log_2 1000 \approx \frac{3}{0{,}30103} \approx 9{,}9658.$$

Tuletame analoogilist mõttekäiku kasutades valemi logaritmi ühelt aluselt a teisele alusele b üleminekuks. Olgu $\log_a N = r$. Siis $N = a^r$. Logaritmime seda võrdust uuel alusel b. Nüüd

$$\log_b N = r \log_b a, \qquad \text{millest } r = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

ehk

$$\boxed{\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.}$$

Kui $b = N$, saame valemist $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$, et

$$\boxed{\log_a N = \frac{1}{\log_N a}.}$$

Naturaallogaritmide ja kümnendlogaritmide vaheline seos avaldub aga kujul

$$\ln N = \frac{\log N}{\log e}.$$

Näide 2.

Lahendame võrrandi $\log_5 x + \log_{25} x + \log_{625} x = 7$.

Lahendus.

Läheme kõigis liidetavates üle alusele 5:

$$\log_5 x + \frac{\log_5 x}{\log_5 25} + \frac{\log_5 x}{\log_5 625} = 7.$$

Et $\log_5 25 = 2$ ja $\log_5 625 = 4$, siis omandab võrrand kuju $\log_5 x = 4$, millest $x = 5^4 = 625$. Pole raske veenduda, et $x = 625$ rahuldab esialgset võrrandit ja on seega lahendiks.

377. Esitage antud logaritm uuel alusel b:

1) $\log_2 625$, $b = 5$; 2) $\log_8 193$, $b = 7$; 3) $\log 12$, $b = 24$;
4) $\log_{0,66} 0{,}8$, $b = 5$; 5) $\log 0{,}04$, $b = 5$; 6) $\log 4{,}7$, $b = \mathrm{e}$;
7) $\ln 8{,}1$, $b = 10$; 8) $\log_4 18$, $b = 18$; 9) $\log_{101} 2$, $b = 0{,}5$;
10) $\ln 100$, $b = 10$; 11) $\ln 2$, $b = 3$; 12) $\log_8 16$, $b = 2$.

378. Leidke

1) $\log_2 100$; 2) $\log_3 243$; 3) $\log_5 0{,}0066$;
4) $\log_{12} 6809$; 5) $\log_{0,4} 1{,}054$; 6) $\log_{405} 10^{-9}$;
7) $\log_{1,06} 750$; 8) $\log_{0,001} 20$; 9) $\log_4 1024$;
10) $\log_7 777$; 11) $\log_2 4096$; 12) $\log_2 12$.

379. Arvutage

1) $2^{\log_4 9}$; 2) $3^{\log_{27} 5}$; 3) $5^{\log_{0,04} 3}$;
4) $a^{\log_{a^2} 4}$; 5) $10^{\log_{100} a}$; 6) $\mathrm{e}^{\log_{\mathrm{e}^3} 125}$.

380. Lahendage võrrand

1) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$; 2) $\log_{64} x + \log_8 x = 0{,}5$;
3) $\log_{81} x + \log_9 x + \log_3 x = 3{,}5$; 4) $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = 0{,}75$.

381. Tõestage võrdus:

1) $\log_{ab} x = \dfrac{\log_a x}{1 + \log_a b}$; 2) $\log_{a^2} x = \dfrac{1}{2}\log_a x$;
3) $\log 2 = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \log_{10} 9$;
4) $\log_2 10 = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 10$.

382. Tõestage, et iga x ja $a > 0$ korral $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$.

3.9. LOGARITMFUNKTSIOON

Arvu logaritmi mõiste käsitlemisel selgitasime, et
kui $a^r = N$, kus $a > 0$ ja $a \neq 1$, siis $r = \log_a N$.

Avaldades eksponentfunktsiooni $y = a^x$ korral analoogiliselt muutuja x muutuja y kaudu ja lugedes viimase argumendiks, saame eksponentfunktsiooni pöördfunktsiooni $x = \log_a y$, ehk traditsioonilistes tähistes $y = \log_a x$. See on logaritmfunktsioon, kus $a > 0$ ja $a \neq 1$ nagu eksponentfunktsiooni korral. Et eksponentfunktsioonil üldse on pöördfunktsioon, tuleb eksponentfunktsiooni

pidevusest ning sellest, et eksponentfunktsioon on kas kasvav või kahanev. Niisiis,

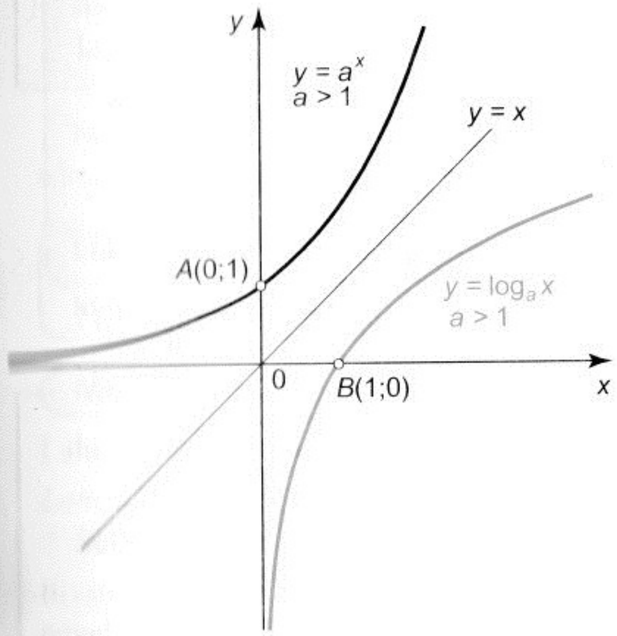
logaritmfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni $y = \log_a x$, kus $a > 0$, $a \neq 1$, mis on eksponentfunktsiooni $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ pöördfunktsioon.

Näiteks funktsiooni $y = 3^x$ pöördfunktsioon on $x = \log_3 y$ ehk traditsioonilises tähistuses $y = \log_3 x$.

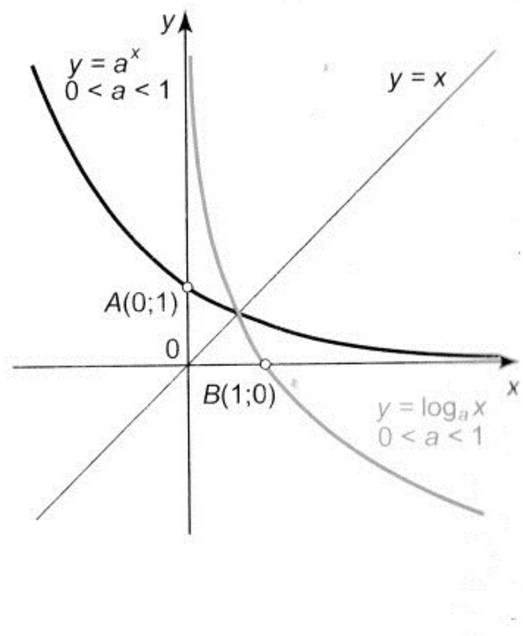
Et logaritmfunktsioon on eksponentfunktsiooni pöördfunktsioon, siis on tema määramispiirkonnaks eksponentfunktsiooni muutumispiirkond ja muutumispiirkonnaks eksponentfunktsiooni määramispiirkond. Tähendab, logaritmfunktsiooni $y = \log_a x$ *määramispiirkonnaks* on vahemik

$0 < x < \infty$,

muutumispiirkonnaks aga kogu reaalarvude hulk **R**.



Joon. 3.15



Joon. 3.16

Logaritmfunktsiooni graafiku saame sama alusega eksponentfunktsiooni graafiku peegeldamisel sirgest $y = x$, mis tähendab, et funktsioonide $y = \log_a x$ ja $y = a^x$ graafikud on sümmeetrilised sirge $y = x$ suhtes (joon. 3.15 ja 3.16). Logaritmfunktsiooni graafikult, mis on pidev joon, loeme välja logaritmfunktsiooni omadused.

1. Kui $a > 1$ (joon. 3.15).

1) Nullkohti on üks, $x_0 = 1$. Graafik läbib punkti B (1; 0).

2) Positiivsuspiirkonnaks on vahemik $1 < x < \infty$.
Negatiivsuspiirkonnaks on vahemik $0 < x < 1$.

3) Funktsioon on kasvav kogu määramispiirkonnas, s.t. vahemikus $0 < x < \infty$.

4) Argumendi x väärtuste tõkestamatul kasvamisel kasvavad $\log x$ väärtused tõkestamatult. Kui argumendi väärtused lähenevad tõkestamatult nullile, vähenevad $\log x$ väärtused tõkestamatult.

5) Funktsiooni graafiku asümptoodiks on y-telg.

2. Kui $0 < a < 1$ (joon. 3.16).

1) Nullkoht on sama, mis juhul $a > 1$, s. o. $x_0 = 1$. Graafik läbib punkti B (1; 0).

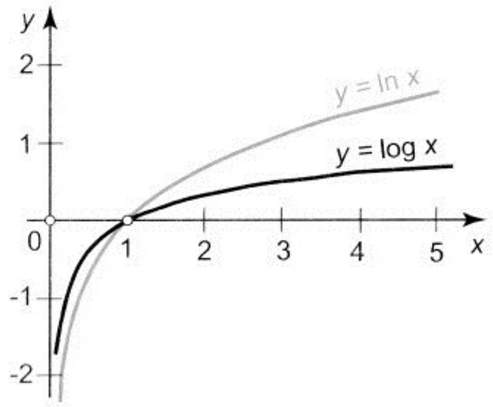
2) Positiivsuspiirkonnaks on vahemik $0 < x < 1$.
Negatiivsuspiirkonnaks on vahemik $1 < x < \infty$.

3) Funktsioon on kahanev kogu määramispiirkonnas, s. t. vahemikus $0 < x < \infty$.

4) Argumendi x väärtuste tõkestamatul kasvamisel vähenevad $\log_a x$ väärtused tõkestamatult. Kui argumendi väärtused lähenevad tõkestamatult nullile, kasvavad $\log_a x$ väärtused tõkestamatult.

5) Funktsiooni graafiku asümptoodiks on y-telg.

Logaritmfunktsioonide $y = \log x$ ja $y = \ln x$ graafikud on esitatud joonisel 3.17.



Joon. 3.17.

Näide 1.

Selgitame, kas 1) $\log_5 0{,}6$; 2) $\log_{0{,}8} 9$; 3) $\ln 2$ on positiivne või negatiivne.

Lahendus.

Tugineme logaritmfunktsiooni teisele omadusele või veelgi parem, kujutame ette vastava funktsiooni graafikut:

1) $a = 5 > 1$, seega kuulub argumendi väärtus 0,6 funktsiooni $y = \log_5 x$ negatiivsuspiirkonda, tähendab $\log_5 0{,}6 < 0$;

2) $\log_{0{,}8} 9 < 0$, sest $a = 0{,}8 < 1$ tõttu kuulub argumendi väärtus 9 funktsiooni $y = \log_{0{,}8} x$ negatiivsuspiirkonda;

3) $\ln 2 > 0$, sest argumendi väärtus 2 kuulub funktsiooni $y = \ln x$ positiivsuspiirkonda (joon. 5.17).

Näide 2.

Selgitame, kumb on suurem, kas 1) $\log 2$ või $\log 6$; 2) $\log_{0{,}2} 3$ või $\log_{0{,}2} 0{,}7$.

Lahendus.

1) Et $a = 10 > 1$, siis on funktsioon $y = \log x$ kasvav ning järelikult vastab suuremale argumendi väärtusele suurem funktsiooni väärtus, seega $\log 2 < \log 6$.

2) Et $a = 0{,}2 < 1$, siis on funktsioon $y = \log_{0{,}2} x$ kahanev ning järelikult vastab suuremale argumendi väärtusele väiksem funktsiooni väärtus, seega $\log_{0{,}2} 3 < \log_{0{,}2} 0{,}7$.

Näiteülesande 2 lahendamisel esinenud mõttekäigud saab kokkuvõtlikult sõnastada järgmise t e o r e e m i n a:

kui $0 < a < 1$, siis $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$.
kui $a > 1$, siis $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

Näide 3.

Lahendame võrratuse $\log_{0{,}4}(2x - 4) < 0$.

Lahendus.

Selle võrratuse lahendamine tähendab funktsiooni $y = \log_{0{,}4}(2x - 4)$ negatiivsuspiirkonna leidmist. Et $a = 0{,}4 < 1$, siis on funktsiooni väärtused negatiivsed, kui logaritmitav on suurem ühest. Tähendab, $2x - 4 > 1$ ehk $x > 2{,}5$.

Näide 4.

Lahendame võrratuse $\log(1 - x) < 2$.

Lahendus.

Kirjutame antud võrratuse kujul $\log(1 - x) < \log 100$. Et $a = 10 > 1$ korral vastab suuremale argumendi väärtusele suurem funktsiooni väärtus, siis $1 - x < 100$, millest $x > -99$. Seejuures peab logaritmitav olema alati positiivne, s. t. $1 - x > 0$, millest $x < 1$. Järelikult on antud võrratuse lahendiks vahemik $-99 < x < 1$.

Näide 5.

Leiame funktsiooni $y=\log(x^2-x^3)$ määramispiirkonna, s. t. argumendi x väärtuste hulga, mille korral funktsiooni väärtusi saab arvutada.

Lahendus.

Et logaritmitav peab alati olema positiivne, siis

$x^2-x^3>0$ ehk $x^2(1-x)>0$.

Tegur x^2 on alati positiivne või null, praegu siiski $x>0$, sest nullist ei saa leida logaritmi. Tähendab, $1-x>0$, millest $x<1$. Et $x\neq 0$, siis määramispiirkond koosneb kahest vahemikust:

$x<0$, $0<x<1$.

A

383. Leidke antud funktsiooni pöördfunktsioon:

1) $y=6^x$; 2) $y=0{,}3^x$; 3) $y=10{,}5^x$;
4) $y=2^{3x}$; 5) $y=0{,}6^{2x}$; 6) $y=0{,}5^{3x}$;
7) $y=2^{-x}$; 8) $y=5^{-x}$; 9) $y=3^{-4x}$;
10) $y=\log_8 x$; 11) $y=\log_{1,2} x$; 12) $y=\log_{0,1} x$.

384. Konstrueerige samasse teljestikku funktsioonide $y=\log_6 x$, $y=\log_2 x$, $y=\log_{1,3} x$ graafikud. Kuidas mõjustab logaritmi aluse $a>1$ muutus vastavate funktsioonide graafikute vastastikust asendit? Milline on nende funktsioonide korral määramispiirkond, nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, kasvamis- ja kahanemisvahemik ning millised on ekstreemumkohad?

385. Näidake, et funktsioonide $y=\log_a x$ ja $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ graafikud on omavahel sümmeetrilised x-telje suhtes.

386. Arvestades kahe eelneva ülesande tulemusi konstrueerige funktsioonide $y=\log_{\frac{1}{6}} x$, $y=\log_{0,5} x$, $y=\log_{\frac{1}{1,3}} x$ graafikud ühte ja samasse teljestikku.

Kuidas mõjustab logaritmi aluse $0<a<1$ muutus vastavate funktsioonide graafikute vastastikust asendit? Milline on nende funktsioonide korral määramispiirkond, nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, kasvamis- ja kahanemisvahemik ning millised on ekstreemumkohad?

387. Konstrueerige samasse teljestikku funktsioonide $y=\log x$ ja $y=\log 3x$ graafikud.

388. Konstrueerige funktsiooni $y=\log x$ graafik ning selle järgi funktsioonide $y=2\log x$ ja $y=1+\log x$ graafikud. Milline on nende funktsioonide korral määramispiirkond, nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, kasvamis- ja kahanemisvahemik ning millised on ekstreemumkohad?

389. Selgitage, kas antud logaritmi väärtus on positiivne või negatiivne.

1) $\log_4 6$; 2) $\log_2 7$; 3) $\log_5 0{,}49$;
4) $\log_{0,81} 4$; 5) $\log_{0,2} 0{,}7$; 6) $\log_4 1$;
7) $\log 0{,}6$; 8) $\log 9$; 9) $\ln 3$;
10) $\ln 0{,}4$; 11) $\ln 0{,}7$; 12) $\log_2 b$;
13) $\log_{0,1} b$; 14) $\log_a 10$; 15) $\log_a 0{,}3$.

390. Selgitage, kumb on suurem, kas

1) $\log_2 3$ või $\log_2 10$; 2) $\log_5 0{,}9$ või $\log_5 4$;
3) $\log_{0,5} 0{,}6$ või $\log_{0,5} 6$; 4) $\log_{0,1} 10$ või $\log_{0,1} 8$;
5) $\log_{\sqrt{2}} 1$ või $\log_{\sqrt{2}} 0{,}7$; 6) $\log\frac{1}{7}$ või $\log 7$;
7) $\log 0{,}73$ või $\log 0{,}74$; 8) $\ln 5$ või $\ln 6$;
9) $\ln 0{,}125$ või $\ln 2^{-3}$; 10) $\ln 2^{-7}$ või $\ln 2^{-6}$;
11) $\log_4 a$ või $\log_4 b$; 12) $\log_a 1$ või $\log_a 2$.

391. Leidke antud funktsiooni määramispiirkond:

1) $\log_a x$; 2) $\log_a(-x)$; 3) $\log_a(x+4)$;
4) $\log(x^2-1)$; 5) $\log_a x^2$; 6) $\log(2x-3)$;
7) $\log\frac{x+1}{x-2}$; 8) $\log\frac{4-x}{x}$; 9) $\ln(8x+4)$;
10) $\log_3(x^2-10x+21)$; 11) $\log_2 8x$; 12) $\ln(x^2+5x)$.

392. Lahendage võrratus

1) $\log_2 x>0$; 2) $\log_3 x<0$; 3) $\log_{0,5} x>0$;
4) $\log_{0,7} x<0$; 5) $\log(x-5)>0$; 6) $\log(1-x)<0$;
7) $\ln(x^2-1)<0$; 8) $\ln\frac{2x-3}{4-x}<0$; 9) $\log_{0,6}\frac{8x+7}{7x-6}>0$;
10) $\log 2x>1$; 11) $\log(x^2+36)<2$; 12) $\log(x-2)<\log 2x$;
13) $\log_{0,1} x>-1$; 14) $\log_{0,3}(x+5)<2$; 15) $\ln x^2<2$.

3.10. LOGARITMVÕRRAND

Logaritmvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles tundmatu esineb logaritmitavas või logaritmi aluses.

Näiteks on logaritmvõrrandeiks võrrandid

$\log_2 x = 4$, $\log_3(2x^2 - 23) = 2$, $\log_{x-1} 27 = 3$.

Logaritmvõrrandi lahendamisel teisendatakse võrrand kujule

$\log_a f(x) = c$ või $\log_a f(x) = \log_a g(x)$,

millest logaritmi definitsiooni või potentseerimise teel saadakse vastavalt võrrand

$f(x) = a^c$ või $f(x) = g(x)$.

Kui saadud võrrand õnnestub lahendada, siis tuleb lahendeid tingimata kontrollida, sest võrrandi potentseerimisel võivad võrrandi poolteks olevate funktsioonide avaldiste määramispiirkonnad laieneda (esialgses võrrandis peab logaritmitav avaldis olema positiivne, potentseerimisel saadud võrrandis aga mitte) ja nii võib tekkida esialgsele võrrandile võõrlahendeid.

Näide 1.

Lahendame võrrandi

$\log_5(x-3) + \log_5(x+3) - \log_5(x+1) = 1$.

Lahendus.

Kasutame võrrandi teisendamisel artiklis 3.7 tuletatud valemeid. Siis saab võrrand kuju

$\log_5 \frac{(x-3)(x+3)}{x+1} = 1$ ehk $\log_5 \frac{x^2-9}{x+1} = 1$,

Arvu logaritmi definitsiooni põhjal

$\frac{x^2-9}{x+1} = 5$, millest $x^2 - 5x - 14 = 0$. Siit $x_1 = -2$ ja $x_2 = 7$.

Kontroll.

Et $x = -2$ korral muutub lähtevõrrandis osa logaritmitavaid negatiivseteks, siis ei ole -2 antud võrrandi lahendiks. Seevastu $x = 7$ on võrrandi lahend, sest

$\log_5(7-3) + \log_5(7+3) - \log_5(7+1) =$

$= \log_5 4 + \log_5 10 - \log_5 8 = \log_5 \frac{4 \cdot 10}{8} = \log_5 5 = 1$.

Vastus. $x = 7$.

Näide 2.

Lahendame võrrandi

$\log_3 2 \cdot \log_2 x \cdot \log_x(2x-3) = \log_3 x$.

Lahendus.

Et logaritmide alused on erinevad, läheme üle ühele ja samale alusele, näiteks alusele 10:

$\frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{\log x}{\log 2} \cdot \frac{\log(2x-3)}{\log x} = \frac{\log x}{\log 3}$.

Lihtsustades võrrandit, saame, et

$\log(2x-3) = \log x$, millest $2x - 3 = x$ ja siit $x = 3$.

Kontroll.

Et $\log_3 2 \cdot \log_2 3 \cdot \log_3(2 \cdot 3 - 3) = \log_3 2 \cdot \frac{1}{\log_3 2} \cdot \log_3 3 = \log_3 3 = 1$

ja ka $\log_3 3 = 1$, siis $x = 3$ on võrrandi lahend.

Logaritmvõrrand võib kujutada endast ka meile juba tuttavat võrrandit $\log_a f(x)$ suhtes.

Näide 3.

Lahendame võrrandi[1]

$\log_3^2 x - 6\log_3 x + 8 = 0$.

Lahendus.

Tegemist on ruutvõrrandiga $\log_3 x$ suhtes. Seega

$\log_3 x = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$,

millest

$\log_3 x = 2$ või $\log_3 x = 4$.

Neist vastavalt

$x_1 = 3^2 = 9$, $x_2 = 3^4 = 81$.

Kontroll.

1) $\log_3^2 9 - 6\log_3 9 + 8 = 2^2 - 6 \cdot 2 + 8 = 0$.

2) $\log_3^2 81 - 6\log_3 81 + 8 = 4^2 - 6 \cdot 4 + 8 = 0$.

Vastus. $x_1 = 9$ ja $x_2 = 81$.

[1] Lühiduse mõttes tähistatakse astet $(\log_a x)^n$ ka sümboliga $\log_a^n x$. Seega $(\log_a x)^2 = \log_a^2 x$ jne.

Näide 4.

Lahendame võrrandi
$x^{\log x} = 100$.

Lahendus.
Võrrand pole ei eksponent- ega logaritmvõrrand, kuid võrrandi mõlemaid pooli alusel 10 logaritmides saame, et

$\log x \cdot \log x = \log 100$, s. t. $\log^2 x = 2$.

Siit

$\log x = \pm\sqrt{2}$

ning

$x_1 = 10^{\sqrt{2}}$, $x_2 = 10^{-\sqrt{2}}$.

Kontroll.

$(10^{\sqrt{2}})^{\log 10^{\sqrt{2}}} = (10^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 10^2 = 100$.

$(10^{-\sqrt{2}})^{\log 10^{-\sqrt{2}}} = (10^{-\sqrt{2}})^{-\sqrt{2}} = 10^2 = 100$.

Tundmatu x väärtused $10^{\pm\sqrt{2}}$ rahuldavad võrrandit, seega on lahendid $x_1 = 10^{\sqrt{2}}$ ja $x_2 = 10^{-\sqrt{2}}$.

A

393. Lahendage võrrand

1) $\log_2 x = 4$;
2) $\log_3(2x^2 - 23) = 2$;
3) $\log_x 16 = 4$;
4) $\log_{x-1} 27 = 3$;
5) $\log_x^2 8 = \frac{1}{2}$;
6) $\log_{x-1}(2 - 2x) = 2$;
7) $\log_4 x = 0$;
8) $\log_{x+1} x^2 = 0$;
9) $\log_4 \log_3 \log_2 x = 0$;
10) $\log_3[1 + \log_2(1 + \log_5 x)] = 0$.

394. Lahendage võrrand

1) $\log x = \log 5$;
2) $\log 8x = \log 13$;
3) $\log(x + 4) = \log 2$;
4) $\log(2x - 5) = \log 7$;
5) $\log x = -\log 3$;
6) $\log x = -\log 0{,}8$;
7) $\log(x - 0{,}2) = -\log 5$;
8) $\log(8 - 3x) = -\log 11$.

395. Lahendage võrrand

1) $\log x + \log(x + 1) = \log 6$;
2) $\log_3(x - 4) + \log_3(x + 2) = \log_3 7$;
3) $\log x + \log(2x - 3) = \frac{1}{2}\log x^2$;
4) $\log(x + 8) - \log(x - 6) = \log 4{,}5$.

396. Lahendage võrrand

1) $\log_4^2 x + \log_4 x - 6 = 0$;
2) $3\log^2 x - 5\log x + 2 = 0$;
3) $2\ln^2 x + 5\ln x - 3 = 0$;
4) $\log_x^2 16 + 2\log_x 16 - 8 = 0$.

397. Lahendage võrrand

1) $\log_2 x - \log_x 2 = 0$;
2) $\log_5 x + \log_x 5 - 5 = 0$;
3) $\ln x + 16\log_x e - 8 = 0$;
4) $\log x - 4\log_x 10 = 0$.

398. Lahendage võrrand

1) $3^{\log x} = 2$;
2) $x^{\log 2x} = 1$;
3) $10^{\log x} = 2{,}7$;
4) $3^{\log x} = 9$.

399. Lahendage võrrand

1) $x^{\log x} = 100x$;
2) $x^{\log\sqrt{x}} = 100$;
3) $5^{x-1} = 7^{1-x}$;
4) $\log_2 \sqrt{x^2} = 1$.

B

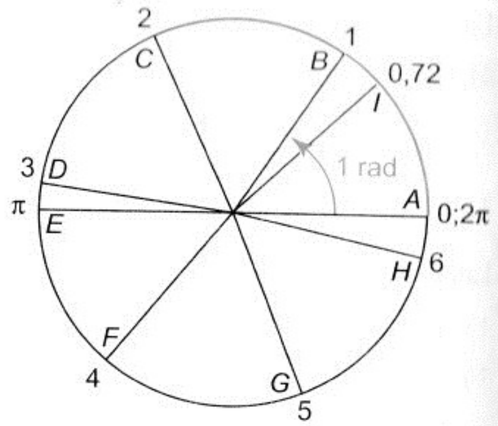
400. Lahendage võrrand

1) $\log\left(x + \frac{x}{x-1}\right) = \log x + \log\frac{x}{x-1}$;
2) $\frac{\log(2x - 19) - \log(3x - 20)}{\log x} = -1$;
3) $5^{\log x} - 3^{-1+\log x} = 3^{1+\log x} - 0{,}2 \cdot 5^{\log x}$.

3.11. KORDAME TRIGONOMEETRIAT

X klassis tutvusime kaareradiaani ja radiaani mõistega:

kaareradiaaniks nimetatakse raadiuse pikkust ringjoone kaart; radiaaniks nimetatakse kesknurka, mis toetub kaareradiaanile.



Joon. 3.18

* Kanname ringjoonele alates punktist A positiivses suunas järjest kaareradiaane kui ringjoone kaare mõõtühikuid (joon. 3.18). Tulemusena saame ringjoone punktid B, C, D, F, G, H, mis vastavad arvudele 1, 2, 3, 4, 5, 6, sest kaared AB, AC, AD, AF, AG, AH on vastavalt 1, 2, 3, 4, 5, 6 kaareradiaani. Et igale kaarele vastab omakorda teatav kesknurk, siis võime öelda, et kaarel olevatele arvudele 1, 2, 3, …, 6 vastavad nurgad $\angle AOB = 1$ rad, $\angle AOC = 2$ rad, … $\angle AOH = 6$ rad. Analoogiliselt vastab arvule 0,72 (punkt I) nurk 0,72 rad ja arvule π (sirg)nurk π rad.

Kui jätkata punktist H kaareradiaani kandmist ringjoonele, saame sellel punktid, mis vastavad järgmistele täisarvudele 7 (punkt I, $7 \approx 2\pi + 0{,}72$), 8, … . Endised punktid A, B, C, … vastavad nüüd arvudele 2π, $2\pi + 1$, $2\pi + 2$, … . Kui kaareradiaani märkimisega ringjoonele jõutakse ringjoone kahekordse pikkuseni, tähendavad edasi punktid A, B, C, … arve 4π, $4\pi + 1$, $4\pi + 2$, … ning neile vastavad kesknurgad 4π rad, $4\pi + 1$ rad, $4\pi + 2$ rad … jne.

Seega vastab igale mittenegatiivsele arvule (ringjoonel) teatud kesknurk radiaanides.

Analoogilise tulemuse saaksime negatiivsete arvude korral: igale negatiivsele arvule vastab teatav negatiivses suunas mõõdetud kesknurk radiaanides. Selleks peaksime kandma ringjoonele kaareradiaane alates punktist A negatiivses suunas.

Kokkuvõtteks: igale reaalarvule x vastab kesknurk x radiaani.

Nurga siinuse, koosinuse ja tangensi definitsiooni kohaselt (õppisime X klassis) seatakse igale nurgale x vastavusse vaid üks siinuse, koosinuse ja tangensi väärtus, s. t. $\sin x$, $\cos x$ ja $\tan x$.

Järelikult vastab igale reaalarvule x üks siinuse, üks koosinuse ja üks tangensi väärtus. See vastavus viibki meid trigonomeetriliste funktsioonide juurde.

Kordame veel kord skemaatiliselt kirjeldatud vastavuste ahelat:

reaalarv → kaareradiaanide arv ringjoone kaares → kesknurk radiaanides → siinuse, koosinuse ja tangensi väärtus.

Näide 1.

Arvule 4 vastab 4 kaareradiaani, sellele kesknurk 4 rad ja viimasele arvud $\sin 4 = -0{,}757$, $\cos 4 = -0{,}654$, $\tan 4 = 1{,}158$. *

Tuletame meelde, et trigonomeetriliste funktsioonide korral kehtivad seosed

$\sin(x + 2n\pi) = \sin x$, $\sin(-x) = -\sin x$,

$\cos(x + 2n\pi) = \cos x$, ja $\cos(-x) = \cos x$,

$\tan(x + 2n\pi) = \tan x$ $\tan(-x) = -\tan x$

Taandamisvalemite väljakirjutamiseks või rakendamiseks piisab järgmise reegli teadmisest:

nurkade $\pi - x$, $\pi + x$ ja $2\pi - x$ korral teiseneb nende siinus avaldiseks $\sin x$, koosinus avaldiseks $\cos x$ ja tangens avaldiseks $\tan x$, mille ees olev märk ("+" või "–") sõltub sellest, milline on vastavalt siinuse, koosinuse või tangensi märk veerandis, kuhu kuulub esialgne nurk $\pi - x$, $\pi + x$, $2\pi - x$. Märgi määramisel loetakse alati nurk x teravnurgaks.

Näide 2.

$\sin(\pi + x) = -\sin x$, sest kolmandas veerandis (nurk $\pi + x$) on siinus negatiivne; $\tan(2\pi - x) = -\tan x$, sest neljandas veerandis (nurk $2\pi - x$) on tangens negatiivne; $\cos(2\pi - x) = \cos x$, sest neljandas veerandis on koosinus positiivne.

Näide 3.

Lihtsustame avaldise

$$\frac{\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\tan\frac{9\pi}{4}}{\sin\frac{4\pi}{3}\cos\frac{7\pi}{4}}.$$

Lahendus.

Kasutame antud avaldise teisendamiseks taandamisvalemeid:

$$\frac{-\tan\frac{\pi}{3}\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{4}}{-\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}\cdot 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

A

401. Leidke $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$, kui nurk α on radiaanmõõdus:

1) 1,58; 2) 2,3; 3) 2,65; 4) 0,25;

5) $\frac{\pi}{6}$; 6) 0; 7) $\frac{\pi}{3}$; 8) $\frac{\pi}{4}$;

9) $\frac{\pi}{5}$; 10) $\frac{3\pi}{8}$; 11) $\frac{2\pi}{7}$; 12) $\frac{3\pi}{11}$.

402. Leidke antud avaldise väärtus:

1) $\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$;

2) $2\tan\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}$;

3) $4\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}$;

4) $\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{2}$;

5) $\tan\frac{\pi}{4}:\left(\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}\right)$;

6) $\tan\pi\tan\frac{\pi}{2}$;

7) $\cos 2\pi+4\sin\frac{3\pi}{2}\sin\pi$;

8) $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\pi$;

9) $\tan^2\frac{\pi}{6}+\cos 0\sin^2\frac{\pi}{3}$;

10) $\sin 2\pi+\tan 0$.

403. Lihtsustage avaldis

1) $\sin(2\pi-\alpha)$; 2) $\cos(2\pi-x)+\sin(\pi-x)$;

3) $\tan(\pi+2\alpha)$; 4) $\tan(-x)-\tan(\pi-x)$;

5) $\cos(16\pi+3\alpha)$; 6) $\sin(\pi+5x)\sin(5x+8\pi)+1$;

7) $\cos(\pi-\alpha)$; 8) $\cos(\pi-4)\cos(\pi+4)+\sin^2(\pi+4)$.

404. Leidke antud avaldise väärtus:

1) $\sin\frac{7\pi}{3}\tan\frac{5\pi}{6}\cos\pi$;

2) $\cos\frac{5\pi}{4}-\sin\frac{3\pi}{4}$;

3) $\tan\frac{11\pi}{6}\tan\frac{7\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{6}$;

4) $\tan\frac{33\pi}{4}+\tan^2\frac{5\pi}{3}$;

5) $\dfrac{\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\tan\frac{25\pi}{4}}{\cos\frac{5\pi}{4}\sin\frac{25\pi}{4}}$;

6) $\dfrac{\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{9\pi}{4}}{\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{7\pi}{6}}$.

3.12. SIINUSFUNKTSIOON

Eelnevas osas selgitasime, et igale reaalarvule x saab vastavusse seada siinuse väärtuse $\sin x$. Tähistame viimase tähega y ja vaatame suurust x muutujana. Siis võrdus $y=\sin x$ seab reaalarvule x vastavusse reaalarvu y, s. t. defineerib funktsiooni, mida nimetatakse **siinusfunktsiooniks**.

Funktsiooni $y=\sin x$ *määramispiirkonnaks* on kogu reaalarvude hulk $\mathbf{R}$, *muutumispiirkonnaks* aga lõik $[-1;\,1]$, s. t. $-1\le\sin x\le 1$ ehk $|\sin x|\le 1$.

Seosest $\sin(-x)=-\sin x$ järeldub, et

siinusfunktsioon on **paaritu funktsioon.**

Järelikult on siinusfunktsiooni

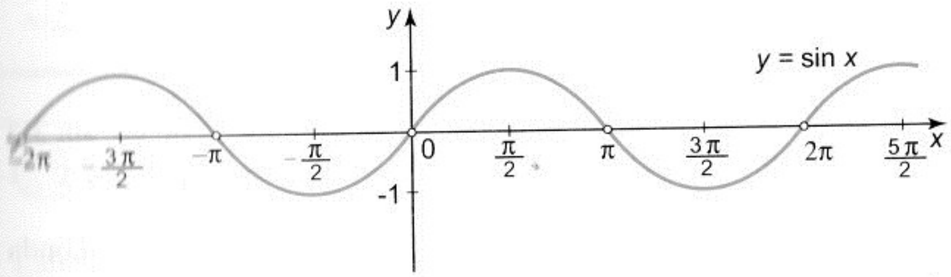
graafik sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.

Seega võime $y=\sin x$ graafiku konstrueerida esialgu vaid argumendi positiivsete väärtuste korral ning siis, sümmeetriale tuginedes, kogu määramispiirkonna ulatuses.

Seosest $\sin(x+n\cdot 2\pi)=\sin x$ järeldub, et $\sin x$ väärtused korduvad iga 2π järel. Siis võib aga funktsiooni $y=\sin x$ graafiku konstrueerida mingil lõigul pikkusega 2π, näiteks lõigul $[0;\,2\pi]$ ning seejärel jätkata samal viisil kogu määramispiirkonna ulatuses.

Et siinusfunktsiooni väärtused korduvad iga 2π järel, siis öeldakse, et

siinusfunktsioon on **perioodiline funktsioon perioodiga** 2π.



Joon. 3.19

Lõigul $[0;\,2\pi]$ konstrueerime funktsiooni $y=\sin x$ graafiku tema üksikute punktide järgi. Argumendi x väärtustele vastavad $\sin x$ väärtused leiame arvuti või taandamisvalemite ning $\sin x$ väärtuste tabeli abil või siis nurga siinuse definitsiooni rakendades.

Siinusfunktsiooni graafikuks olevat joont (joon. 3.19) nimetatakse **sinusoidiks**.

Et sinusoid on pidev joon, siis võib ka öelda, et funktsioon $y=\sin x$ on pidev.

Graafikult on võimalik välja lugeda mitmeid siinusfunktsiooni olulisi omadusi.

Siinusfunktsiooni **nullkohtadeks** on argumendi väärtused

$\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ ehk $n\pi$, kus $n \in \mathbf{Z}$.

Siinusfunktsiooni **positiivsuspiirkonna** moodustavad vahemikud

$\ldots, -2\pi < x < -\pi, \ 0 < x < \pi, \ 2\pi < x < 3\pi, \ \ldots,$

mis korduvad iga 2π järel, s. o. vahemikud

$2n\pi < x < \pi + 2n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}$.

Siinusfunktsiooni **negatiivsuspiirkonna** moodustavad vahemikud

$\ldots, -\pi < x < 0, \ \pi < x < 2\pi, \ \ldots,$

mis korduvad samuti iga 2π järel, s. o. vahemikud

$-\pi + 2n\pi < x < 2n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}$.

Funktsiooni $y=\sin x$ **kasvamisvahemikud** on

$$\ldots, -\frac{5\pi}{2} < x < -\frac{3\pi}{2}, \ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \ \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

ehk

$$-\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbf{Z},$$

ning **kahanemisvahemikud** on

$$\ldots, -\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}, \ \ldots$$

ehk

$$\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Näide 1.

Kasutades siinusfunktsiooni graafikut, leiame, 1) millise märgiga on $\sin 3{,}5$ väärtus ning 2) kumb on suurem, kas $\sin 2$ või $\sin 3$.

Lahendus.

1) Et $\pi < 3{,}5 < 2\pi$, s. t. 3,5 kuulub funktsiooni $y=\sin x$ negatiivsuspiirkonda (vt. joon. 3.19), siis on $\sin 3{,}5$ negatiivne.

2) Et $\frac{\pi}{2} < 2 < 3 < \pi$, s. t. argumendi väärtused kuuluvad siinusfunktsiooni kahanemisvahemikku (vt. joon. 3.19), siis $\sin 2 > \sin 3$.

Näide 2.

Lahendame võrrandi $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lahendus.

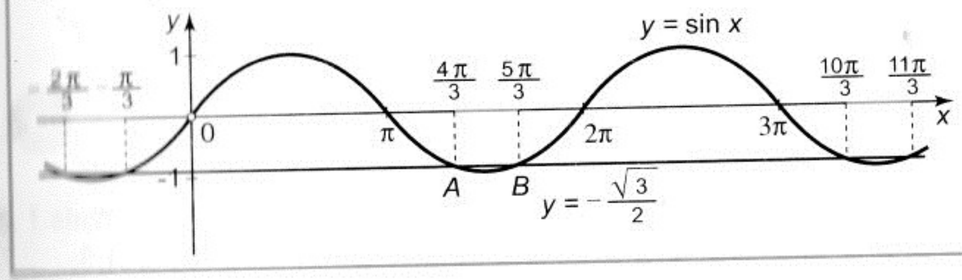
Joonestame siinusfunktsiooni graafiku ning sirge $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (joon. 3.20).

Võrrandi lahendeiks on nende joonte lõikepunktide abstsissid. Et nurga $\frac{\pi}{3}$ siinus on $\frac{\sqrt{3}}{2}$, siis punktide A ja B abstsissid on vastavalt $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ ja $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$, sest $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Meid huvitavad lõikepunktid korduvad iga 2π järel. Seega on võrrandi $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ lahendid

$x_1 = \frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ ja $x_2 = \frac{5\pi}{3} + n \cdot 2\pi$;

näiteks $-\frac{2\pi}{3}$ ja $-\frac{\pi}{3}$, kui $n=-1$ ning $\frac{10\pi}{3}$ ja $\frac{11\pi}{3}$, kui $n=1$.



Joon. 3.20

***Näide 3.**

Lahendame võrratuse $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lahendus.

Selleks kasutame jälle joonist 3.20, kus on nii siinusfunktsiooni graafik kui ka sirge $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Et $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, siis järelikult otsime x-teljelt piirkonda, kus funktsiooni $y=\sin x$ graafik on allpool sirget $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Üheks selliseks vahe-

mikuks on $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$, sest punktide A ja B abstsissideks saime eelmises näites $\frac{4\pi}{3}$ ja $\frac{5\pi}{3}$. Kuna vastavad piirkonnad korduvad iga 2π järel, siis võrratuse $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ lahend koosneb vahemikest

$$\ldots, -\frac{2\pi}{3} < x < -\frac{\pi}{3}, \quad \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}, \quad \frac{10\pi}{3} < x < \frac{11\pi}{3}, \ \ldots$$

ehk lühemalt kirjutades vahemikest

$$\frac{4\pi}{3} + 2n\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}. *$$

A

405. Leidke funktsiooni $y = \sin x$ väärtus, kui

1) $x = \frac{\pi}{4}$; 2) $x = \frac{\pi}{3}$; 3) $x = \frac{\pi}{2}$; 4) $x = -\frac{\pi}{2}$;
5) $x = \frac{4\pi}{27}$; 6) $x = \frac{8\pi}{45}$; 7) $x = \frac{13\pi}{16}$; 8) $x = -\frac{5\pi}{16}$;
9) $x = \frac{9\pi}{16}$; 10) $x = \frac{31\pi}{54}$; 11) $x = \frac{53\pi}{12}$; 12) $x = -\frac{53\pi}{8}$;
13) $x = 0{,}33$; 14) $x = 2{,}25$; 15) $x = 2{,}93$; 16) $x = -0{,}07$.

406. Leidke võrrandi $\sin x = 0$ lahendid.

407. Kasutades siinusfunktsiooni graafikut leidke avaldise märk.

1) $\sin 5$; 2) $\sin(-3)$; 3) $\sin(-1)$; 4) $\sin 9$;
5) $\sin 7$; 6) $\sin(-4{,}8)$; 7) $\sin(-2)$; 8) $\sin 1{,}5$;
9) $\sin\frac{3\pi}{8}$; 10) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$; 11) $\sin\left(-\frac{7\pi}{10}\right)$; 12) $\sin\frac{7\pi}{10}$.

408. Kasutades siinusfunktsiooni graafikut otsustage, kumb on suurem, kas

1) $\sin 1{,}8$ või $\sin 4{,}2$;
2) $\sin(-1)$ või $\sin 1$;
3) $\sin(-4{,}5)$ või $\sin(-2)$;
4) $\sin 6$ või $\sin 7{,}2$;
5) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ või $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$;
6) $\sin\frac{3\pi}{4}$ või $\sin\frac{4\pi}{3}$;
7) $\sin\frac{3\pi}{2}$ või $\sin\frac{7\pi}{4}$;
8) $\sin 2\pi$ või $\sin\frac{7\pi}{4}$.

409. Konstrueerige funktsiooni graafik antud piirkonnas:

1) $y = 2\sin x$, $-\pi \le x \le 2\pi$; 2) $y = 0{,}5\sin x$, $-\pi \le x \le 2\pi$;
3) $y = 1 + \sin x$, $0 \le x \le 3\pi$; 4) $y = \sin x - 2$, $0 \le x \le 2\pi$;
5) $y = 2 + 2\sin x$, $0 \le x \le 3\pi$; 6) $y = -1 + 2\sin x$, $0 \le x \le 3\pi$;
7) $y = -\sin x$, $0 \le x \le 4\pi$; 8) $y = 2 - \sin x$, $0 \le x \le 4\pi$;
9) $y = |\sin x|$, $-2\pi \le x \le 3\pi$; 10) $y = |\sin x| - 1$, $-2\pi \le x \le 3\pi$.

410. Leidke eelmises ülesandes antud funktsioonide nullkohad.

411. Leidke ülesandes 409 antud funktsioonide positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad.

412. Leidke ülesandes 409 antud funktsioonide kasvamis- ja kahanemisvahemikud ning funktsiooni maksimum ja miinimum.

413. Selgitage, millistel argumendi väärtustel on järgmisel funktsioonil maksimum ja millistel miinimum. Kui suured need on?

1) $y = 3 + 4\sin x$; 2) $y = 2 - \sin x$; 3) $y = 0{,}75\sin x$; 4) $y = \sin^2 x$.

414. *Lahendage võrratus

1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x > -\frac{1}{2}$;
4) $\sin x < \frac{1}{2}$; 5) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\sin x > -1$;
7) $\sin x > 0{,}4$; 8) $\sin x > 0{,}12$; 9) $\sin x < 0{,}66$.

B

415. Lahendage võrrand

1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x = -\frac{1}{2}$;
4) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\sin x = 1$; 6) $\sin x = 0{,}66$.

3.13. KOOSINUSFUNKTSIOON

Analoogiliselt siinusfunktsiooniga saab rääkida ka **koosinusfunktsioonist**, s. t. funktsioonist $y = \cos x$.

Funktsiooni **$y = \cos x$ määramispiirkonnaks** on kogu reaalarvude hulk **R**.
Koosinusfunktsiooni **muutumispiirkonnaks** on lõik [–1; 1], s. t.
$-1 \le \cos x \le 1$ ehk $|\cos x| \le 1$.

Seosest $\cos(-x) = \cos x$ järeldub, et

koosinusfunktsioon on **paarisfunktsioon**

ning tema

graafik on sümmeetriline *y*-telje suhtes.

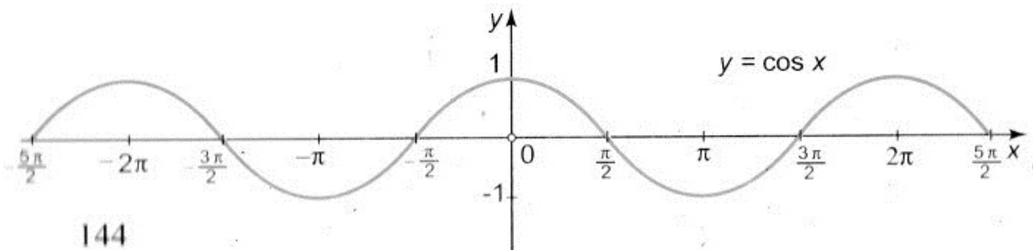
Et $\cos(x + n \cdot 2\pi) = \cos x$, siis järelikult korduvad koosinusfunktsiooni väärtused iga 2π järel. Tähendab, ka

koosinusfunktsioon on **perioodiline funktsioon** perioodiga 2π .

Koosinusfunktsiooni graafiku saame konstrueerida üksikute punktide kaupa nagu siinusfunktsiooni graafiku või siis järgmiselt. Teisendame $\cos x$ avaldist:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Võrdusest $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ järeldub, et funktsioon $y = \cos x$ saab samu väärtusi, mis funktsioon $y = \sin x$ saab $\frac{\pi}{2}$ võrra hiljem. Tähendab, kui nihutada joonisel 3.19 $y = \sin x$ graafikut piki *x*-telge $\frac{\pi}{2}$ ühiku võrra vasakule, siis saame $y = \cos x$ graafiku. Viimane on esitatud joonisel 3.21.



Joon. 3.21

Koosinusfunktsioon on pidev funktsioon.

Näide 1.

Kehtib võrratus $\cos(-3) < \cos(-1)$, sest argumendi väärtused –3 ja –1 kuuluvad koosinusfunktsiooni ühte kasvamisvahemikku: $-\pi < -3 < -1 < 0$.

Näide 2.

Selgitame, millise märgiga on $\cos(-5{,}8)$. Et argumendi väärtus –5,8 kuulub koosinusfunktsiooni positiivsuspiirkonda $\left(-\frac{5\pi}{2} < -5{,}8 < -\frac{3\pi}{2}\right)$, siis $\cos(-5{,}8) > 0$.

Näide 3.

Kasutades koosinusfunktsiooni graafikut, lahendame võrrandi $\cos x = 0{,}5$ ja võrratuse $\cos x < 0{,}5$.

Joonestame koosinusfunktsiooni graafiku ning sirge $y = 0{,}5$ (joon. 3.22). Võrrandi $\cos x = 0{,}5$ lahendiks on nende joonte lõikepunktide abstsissid. Et $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = 0{,}5$, siis on punktide *A* ja *B* abstsissid vastavalt $-\frac{\pi}{3}$ ja $\frac{\pi}{3}$. Kuna meid huvitavad punktid korduvad iga 2π järel, siis on võrrandi $\cos x = 0{,}5$ lahendid

$$\ldots, -\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \ldots \text{ ja } \ldots, -\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \ldots$$

ehk argumendi väärtused

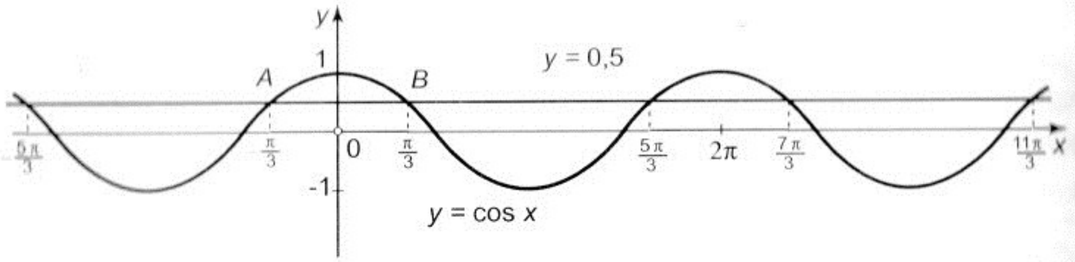
$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \text{ ja } x_2 = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \text{ kus } n \in \mathbf{Z}.$$

* Kasutame võrratuse $\cos x < 0{,}5$ lahendamiseks sama joonist. Nüüd huvitab meid *x*-telje piirkond, kus funktsiooni $y = \cos x$ graafik paikneb allpool sirget $y = 0{,}5$. Üheks selliseks vahemikuks, nagu näha jooniselt, on vahemik $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$. Kuna vastavad piirkonnad korduvad iga 2π järel, siis võrratuse $\cos x < 0{,}5$ lahend koosneb vahemikest

$$\ldots, -\frac{5\pi}{3} < x < -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} < x < \frac{11\pi}{3}, \ldots$$

ehk

$$\frac{\pi}{3} + 2n\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2n\pi, \; n \in \mathbf{Z}. \; *$$



Joon. 3.22

A

416. Leidke funktsiooni $y = \cos x$ väärtus argumendi väärtusel

1) $x = \frac{\pi}{6}$; 2) $x = \frac{\pi}{3}$; 3) $x = \frac{\pi}{2}$; 4) $x = -\frac{\pi}{6}$;

5) $x = \frac{2\pi}{9}$; 6) $x = \frac{3\pi}{8}$; 7) $x = \pi$; 8) $x = -\frac{3\pi}{10}$;

9) $x = \frac{9\pi}{10}$; 10) $x = \frac{7\pi}{9}$; 11) $x = \frac{17\pi}{6}$; 12) $x = -\frac{113\pi}{14}$;

13) $x = 2,04$; 14) $x = 0,43$; 15) $x = 0,05$; 16) $x = -3$.

417. Leidke võrrandi $\cos x = 0$ lahendid.

418. Leidke koosinusfunktsiooni (joon. 3.21) 1) positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, 2) kasvamis- ja kahanemisvahemikud, 3) ekstreemumkohad ja vastavad funktsiooni väärtused.

419. Kasutades koosinusfunktsiooni graafikut otsustage, millise märgiga on

1) $\cos 8$; 2) $\cos(-5,6)$; 3) $\cos 1$; 4) $\cos 3,2$;

5) $\cos\frac{5\pi}{8}$; 6) $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$; 7) $\cos\frac{\pi}{9}$; 8) $\cos\frac{12\pi}{5}$.

420. Kasutades koosinusfunktsiooni graafikut otsustage, kumb on väiksem, kas

1) $\cos 0,8$ või $\cos 1,8$;
2) $\cos(-2\pi)$ või $\cos(-\pi)$;
3) $\cos\frac{11\pi}{5}$ või $\cos\frac{17\pi}{6}$;
4) $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$ või $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$;
5) $\cos 4$ või $\cos 4,2$;
6) $\cos(-1)$ või $\cos(-2)$;
7) $\cos 6,4$ või $\cos 8$;
8) $\cos(-5)$ või $\cos 3$.

421. Konstrueerige antud funktsiooni graafik antud piirkonnas:

1) $y = 2\cos x$, $-\pi \le x \le 2\pi$; 2) $y = \frac{1}{2}\cos x$, $-\pi \le x \le 2\pi$;

3) $y = 2 + \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2}$; 4) $y = \cos x - 1$, $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$;

5) $y = 1 + 0,5\cos x$, $0 \le x \le \frac{5\pi}{2}$; 6) $y = -2 + 2\cos x$, $0 \le x \le 2\pi$;

7) $y = -\cos x$, $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$; 8) $y = 1 - \cos x$, $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$.

422. Leidke eelmises ülesandes antud funktsioonide nullkohad.

423. Leidke ülesandes 421 antud funktsioonide positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad.

424. Leidke ülesandes 421 antud funktsioonide kasvamis- ja kahanemisvahemikud, ekstreemumkohad ning funktsiooni maksimum ja miinimum.

425. Leidke, millistel argumendi väärtustel on funktsioonil suurim ja millistel vähim väärtus ning leidke need väärtused:

1) $y = 3 + 4\cos x$; 2) $y = 1 - \cos x$;

3) $y = 1,5\cos x$; 4) $y = \cos^2 x$.

426. *Kasutades koosinusfunktsiooni graafikut lahendage võrratus

1) $\cos x > \frac{1}{2}$; 2) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x < -\frac{1}{2}$;

4) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\cos x > -\frac{1}{2}$; 6) $\cos x > 0$;

7) $\cos x > 1$; 8) $\cos x > -1$; 9) $\cos x < 0,83$.

B

427. Kasutades koosinusfunktsiooni graafikut lahendage võrrand

1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{1}{2}$;

4) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\cos x = -1$;

7) $\cos x = 0,4$; 8) $\cos x = 0,64$; 9) $\cos x = 0,83$.

3.14. TANGENSFUNKTSIOON

Tangensfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni $y = \tan x$, $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Funktsiooni $y = \tan x$ **määramispiirkond** koosneb vahemikest

$$\ldots, \quad -\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}, \quad \ldots$$

ehk määramispiirkonnaks on reaalarvude hulk $\boldsymbol{R}$, välja arvatud arvud kujul $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, kus $n \in \boldsymbol{Z}$.

Seosest $\tan(-x) = -\tan x$ järeldub, et

tangensfunktsioon on **paaritu funktsioon**

ning tema

graafik on seega sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.

X klassist on teada, et iga $n \in \mathbf{Z}$ korral kehtib seos $\tan(x + n\pi) = \tan x$.

Sellest järeldub, et $\tan x$ väärtused korduvad iga π järel. Tähendab, teades funktsiooni $y = \tan x$ graafikut π ulatuses, näiteks vahemikus $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, saame konstrueerida graafiku kogu määramispiirkonna ulatuses. Et tangensfunktsiooni väärtused korduvad iga π järel, siis

tangensfunktsioon on **perioodiline funktsioon** perioodiga π.

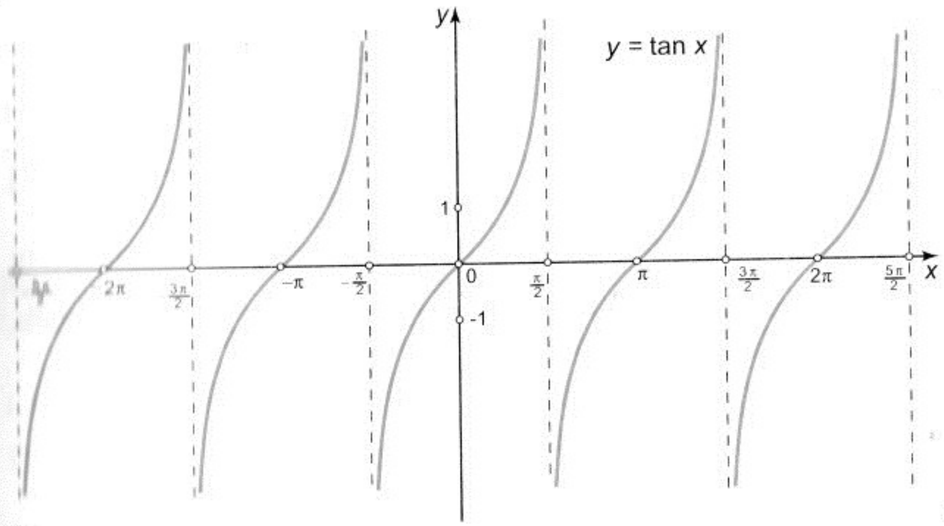
Tangensfunktsiooni perioodilisusest järeldub, et graafiku konstrueerimiseks piisab esmalt selle konstrueerimisest vahemikus pikkusega π, näiteks vahemikus $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, ning selle jätkamisest siis, perioodilisust arvestades, kogu määramispiirkonna ulatuses. Vahemikus $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ konstrueerime funktsiooni $y = \tan x$ graafiku tema üksikute punktide järgi, kusjuures argumendi x väärtustele vastavad $\tan x$ väärtused leiame arvuti või valemi $\tan(-x) = \tan x$ ning $\tan x$ väärtuste tabeli abil või nurga tangensi definitsiooni rakendades.

Tangensfunktsiooni graafikuks olevat joont nimetatakse **tangensoidiks**. See on kujutatud joonisel 3.23. Jooniselt on näha, et tangensfunktsiooni graafik

koosneb üksikutest osadest – harudest, mis lähenevad punktiiriga märgitud sirgetele, asümptootidele. Viimaste võrrandid esituvad kujul

$$x = (2n+1)\frac{\pi}{2},$$

kus $n \in \mathbf{Z}$. Väärtustel $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ tangensfunktsiooni graafik katkeb.



Joon. 3.23

Funktsiooni $y = \tan x$ **muutumispiirkonnaks** on kogu reaalarvude hulk $\mathbf{R}$, s. t. $-\infty < \tan x < +\infty$.

Näide 1.

Selgitame, mis märgiga on $\tan\frac{9\pi}{4}$.

Lahendus.

Argumendi väärtus $x = \frac{9\pi}{4}$ kuulub tangensfunktsiooni positiivsuspiirkonda $\left(2\pi < \frac{9\pi}{4} < \frac{5\pi}{2}\right)$. Seetõttu $\tan\frac{9\pi}{4} > 0$.

Näide 2.

Võrdleme $\tan(-3,7)$ ja $\tan(-2)$ väärtusi.

Lahendus.

Kehtib võrratus $\tan(-3,7) < \tan(-2)$, sest argumendi väärtused $-3,7$ ja -2 kuuluvad vahemikku $-\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$, kus tangensfunktsioon on kasvav.

Näide 3.

Lahendame võrrandi $\tan x = 1$ ja võrratuse $\tan x > 1$.

Lahendus.

Et võrrandit $\tan x = 1$ rahuldab argumendi väärtus $\frac{\pi}{4}$ ja tangensfunktsioon on perioodiline perioodiga π, siis on selle võrrandi lahendeiks argumendi väärtused

$$\ldots, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \ldots \text{ ehk } x = \frac{\pi}{4} + n\pi, \text{ kus } n \in \mathbf{Z}.$$

* Et $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ ja argumendi väärtus $\frac{\pi}{4}$ kuulub vahemikku $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, kus funktsioon $y = \tan x$ kasvab, siis $\tan x > 1$, kui $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Kuna funktsiooni periood on π, siis korduvad vahemikud, kus $\tan x > 1$, iga π järel. Tähendab, võrratuse $\tan x > 1$ lahend koosneb vahemikest

$$\ldots, -\frac{3\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}, \ldots$$

ehk

$$\frac{\pi}{4} + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ kus } n \in \mathbf{Z}. *$$

A

428. Leidke funktsiooni $y = \tan x$ väärtus argumendi väärtusel

1) $x = 0$; 2) $x = \frac{\pi}{3}$; 3) $x = \frac{\pi}{2}$; 4) $x = -\frac{\pi}{4}$;

5) $x = \frac{7\pi}{10}$; 6) $x = \frac{4\pi}{9}$; 7) $x = \frac{8\pi}{15}$; 8) $x = -\frac{5\pi}{9}$;

9) $x = \frac{4\pi}{17}$; 10) $x = \frac{6\pi}{10}$; 11) $x = \frac{11\pi}{15}$; 12) $x = -\frac{3\pi}{16}$;

13) $x = 2{,}6$; 14) $x = 0{,}82$; 15) $x = 1{,}03$; 16) $x = -3{,}1$.

429. Leidke tangensfunktsiooni (joon. 3.23) 1) positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, 2) nullkohad, 3) kasvamis- ja kahanemisvahemikud, 4) ekstreemumkohad.

430. Selgitage, millise märgiga on

1) $\tan 4{,}5$; 2) $\tan(-6)$; 3) $\tan(-1{,}8)$; 4) $\tan 7$;

5) $\tan 0{,}78$; 6) $\tan(-4)$; 7) $\tan(-7)$; 8) $\tan 2$;

9) $\tan\frac{7\pi}{4}$; 10) $\tan\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; 11) $\tan(-2\pi)$; 12) $\tan\frac{2\pi}{3}$.

431. Selgitage, kumb on suurem, kas

1) $\tan\frac{\pi}{3}$ või $\tan\frac{4\pi}{9}$; 2) $\tan\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ või $\tan\frac{\pi}{18}$;

3) $\tan\frac{5\pi}{9}$ või $\tan\frac{10\pi}{9}$; 4) $\tan\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ või $\tan\left(-\frac{20\pi}{9}\right)$;

5) $\tan 3{,}2$ või $\tan 4$; 6) $\tan(-0{,}4)$ või $\tan 1$.

432. *Lahendage võrratus

1) $\tan x < \sqrt{3}$; 2) $\tan x > -1$; 3) $\tan x < -\sqrt{3}$;

4) $\tan x > \frac{\sqrt{3}}{3}$; 5) $\tan x < 0{,}95$; 6) $\tan x > 2{,}6$.

B

433. Lahendage võrrand

1) $\tan x = \sqrt{3}$; 2) $\tan x = -1$; 3) $\tan x = -\sqrt{3}$;

4) $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 5) $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $\tan x = 2{,}6$.

3.15. PERIOODILINE FUNKTSIOON

Trigonomeetriliste funktsioonide käsitlemisel selgus, et need on perioodilised funktsioonid, kusjuures siinus- ja koosinusfunktsiooni periood on 2π, tangensfunktsiooni periood aga π.

Üldiselt nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ **perioodiliseks**, kui leidub nullist erinev arv p, mille lisamisel argumendi mistahes väärtusele määramispiironnast funktsiooni väärtus ei muutu, s. t. kui argumendi x iga väärtuse korral määramispiirkonnast

$$f(x + p) = f(x).$$

Funktsiooni **perioodiks** nimetame edaspidi vähimat positiivset arvu p, millel korral kehtib viimane seos.

Trigonomeetriliste funktsioonide korral vastavad võrdusele $f(x + p) = f(x)$ võrdused

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x,$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x,$$
$$\tan(x + \pi) = \tan x.$$

Näide 1.

Funktsioon $f(x)=3-2\sin x$ on perioodiline, sest leidub positiivne arv $p=2\pi$ nii, et $f(x+2\pi)=f(x)$:

$f(x+2\pi)=3-2\sin(x+2\pi)=3-\sin x=f(x)$.

Näide 2.

Selgitame, kas funktsioon $y=\cos 0{,}5x$ on perioodiline.

Lahendus.

Võtame $p=2\pi$ ja kontrollime võrduse $f(x+p)=f(x)$ kehtivust:

$\cos 0{,}5(x+2\pi)=\cos(0{,}5x+\pi)=-\cos 0{,}5x$.

Kuigi tulemus pole $\cos 0{,}5x$, ei tähenda see veel, et funktsioon $y=\cos 0{,}5x$ ei ole perioodiline. Võib ju arvu p valik olla ebaõnnestunud. Olgu nüüd $p=4\pi$. Siis

$\cos 0{,}5(x+4\pi)=\cos(0{,}5x+2\pi)=\cos 0{,}5x$.

Tähendab, funktsioon $y=\cos 0{,}5x$ on siiski perioodiline.

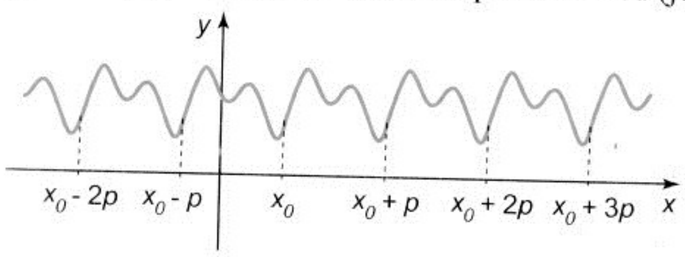
Kui funktsioon $y=f(x)$ on perioodiline perioodiga p, siis saame funktsiooni graafiku jaotada täpselt ühesugusteks perioodi pikkusteks osadeks. Tähendab, funktsiooni $y=f(x)$ graafik on täpselt samasugune nii piirkondades

$[x_0;x_0+p]$; $[x_0+p;x_0+2p]$; $[x_0+2p;x_0+3p]$; …,

kuid ka piirkondades

$[x_0;x_0+p]$; $[x_0-p;x_0]$; $[x_0-2p;x_0-p]$; … .

Ühe perioodilise funktsiooni graafik on esitatud joonisel 3.24. Ka funktsioonid $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ on perioodilised (joon. 3.19, 3.21, 3.23).



Joon. 3.24

A

434. Näidake, et funktsioon on perioodiline.

1) $y=\sin x+\cos x$; 2) $y=4+2\cos x$;

3) $y=2+\tan x$; 4) $y=\sin x+\tan x$;

5) $y=\sin 2x$; 6) $y=\tan\frac{3}{4}x$;

7) $y=\cos(x+2)$; 8) $y=\tan 4x$.

3.16. * FUNKTSIOONID $y=\sin kx$ JA $y=\cos kx$

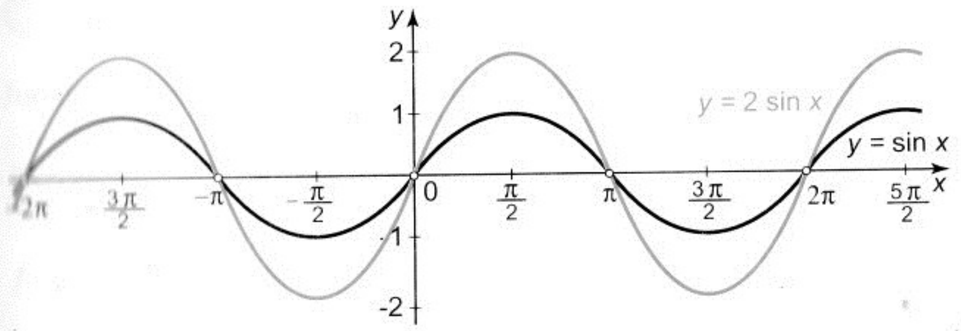
Nagu siinusfunktsiooni $y=\sin x$ graafikult (joon. 3.19) on näha, võnguvad funktsiooni väärtused lõigus $[-1;1]$, mille keskpunktiks (tasakaaluasendiks) on väärtus 0. Maksimaalset kõrvalekallet sellest väärtusest nimetatakse **amplituudiks**[1]. Funktsiooni $y=\sin x$ korral on amplituud 1.

1. Vaatleme funktsiooni $y=2\sin x$.

Funktsiooni $y=2\sin x$ väärtused on kaks korda suuremad kui funktsiooni $y=\sin x$ väärtused sama argumendi väärtuse korral. Funktsiooni $y=2\sin x$ väärtused võnguvad lõigus [–2; 2] (joon. 3.25), amplituud on 2.

Üldiselt:

funktsiooni $y=a\cdot\sin x$ $(a>0)$ väärtused võnguvad lõigus $[-a;a]$, selle funktsiooni amplituud on a.



Joon. 3.25

Funktsiooni $y=a\cdot\sin x$ maksimaalseks väärtuseks on a ja minimaalseks väärtuseks $-a$. Funktsiooni $y=a\cdot\sin x$ periood, nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, kasvamis- ja kahanemispiirkond on samad mis funktsioonil $y=\sin x$.

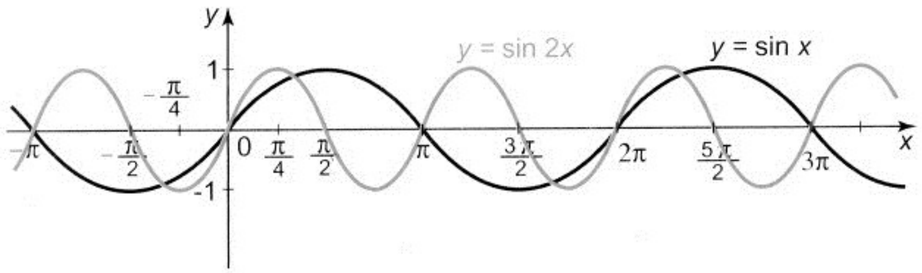
2. Vaatleme funktsiooni $y=\sin kx$.

Alustame näiteks funktsiooni $y=\sin 2x$ graafiku konstrueerimisest. Selleks arutleme järgmiselt. Funktsioon $y=\sin 2x$ saab samu väärtusi, mis funktsioon $y=\sin x$, ainult "2 korda kiiremini". Kui näiteks $\sin x=0{,}5$ $x=\frac{\pi}{6}$ korral, siis $\sin 2x=0{,}5$ juba $x=\frac{\pi}{12}$ korral, kui $\sin x=1$ $x=\frac{\pi}{2}$ korral, siis $\sin 2x=1$ juba

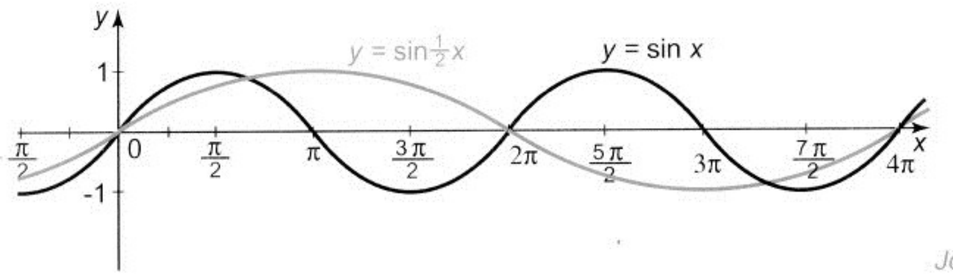
[1] *Amplitudo* (ladina k.) – laius, ulatuvus.

$x = \frac{\pi}{4}$ korral. Seega saab funktsioon $y = \sin 2x$ kõiki neid väärtusi, mida $y = \sin x$ saab perioodi 2π ulatuses (näiteks lõigul $[0;\ 2\pi\ ]$), kaks korda lühemal lõigul, s. t. π ulatuses (näiteks lõigul $[0;\ \pi\ ]$). Tähendab, $y = \sin 2x$ graafik võngub kaks korda sagedamini (kuid sama amplituudiga) kui funktsiooni $y = \sin x$ graafik. Funktsiooni $y = \sin 2x$ graafikuks (joon. 3.26) on kahekordselt kokku surutud sinusoid, mille periood on π.

Analoogiliselt leiame, et funktsioon $y = \sin\frac{1}{2}x$ saab samu väärtusi, mis funktsioon $y = \sin x$, kuid kaks korda harvemini, s. t. ta saab samu väärtusi, mis $y = \sin x$ 2π ulatuses, kaks korda pikemal lõigul, s. o. 4π ulatuses. Teisiti öeldes on funktsiooni $y = \sin\frac{1}{2}x$ periood $2\pi : \frac{1}{2} = 4\pi$. Graafikuks on kahekordselt väljavenitatud sinusoid (joon. 3.27), mille periood on 4π.



Joon. 3.26



Joon. 3.27

Üldjuhul:

funktsioon $y = \sin kx$ on perioodiline perioodiga $\frac{2\pi}{k}$, graafikuks on k-kordselt kokkusurutud ($k > 1$ korral) või väljavenitatud ($0 < k < 1$ korral) sinusoid; amplituud on 1.

Näide 1.

Funktsiooni $y = \sin 2x$ graafikult (joon. 3.26) näeme, et nullkohad on argumendi väärtused $n \cdot \frac{\pi}{2}$, positiivsuspiirkonna moodustavad vahemikud $n \cdot \pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$, negatiivsuspiirkonna vahemikud $-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < n\pi$, kasvamisvahemikud on $-\frac{\pi}{4} + n\pi < x < \frac{\pi}{4} + n\pi$ ja kahanemisvahemikud $\frac{\pi}{4} + n\pi < x < \frac{3\pi}{4} + n\pi$, kus $n \in \mathbf{Z}$. Funktsioon $y = \sin 2x$ on paaritu funktsioon (graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes), sest $f(-x) = \sin 2(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x)$. Maksimaalse väärtuse 1 saavutab funktsioon argumendi väärtustel $\frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$ ehk $(4n+1) \cdot \frac{\pi}{4}$ ning minimaalse väärtuse –1 argumendi väärtustel $-\frac{\pi}{4} + n\pi$ ehk $(4n-1)\frac{\pi}{4}$, kui n $\in \mathbf{Z}$.

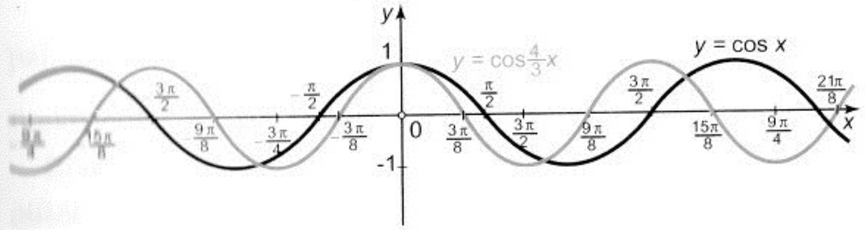
3. Vaatleme funktsiooni y = cos kx.

Kõik on $y = \cos kx$ korral analoogiline funktsiooniga $y = \sin kx$.

Näide 2.

Joonisel 3.28 on kujutatud $y = \cos x$ ja $y = \cos\frac{4}{3}x$ graafikud. Funktsiooni $y = \cos\frac{4}{3}x$ periood on $2\pi : \frac{4}{3} = \frac{3\pi}{2}$, funktsioon on paarisfunktsioon, sest

$$f(-x) = \cos\frac{4}{3}(-x) = \cos\left(-\frac{4}{3}x\right) = \cos\frac{4}{3}x = f(x).$$



Joon. 3.28

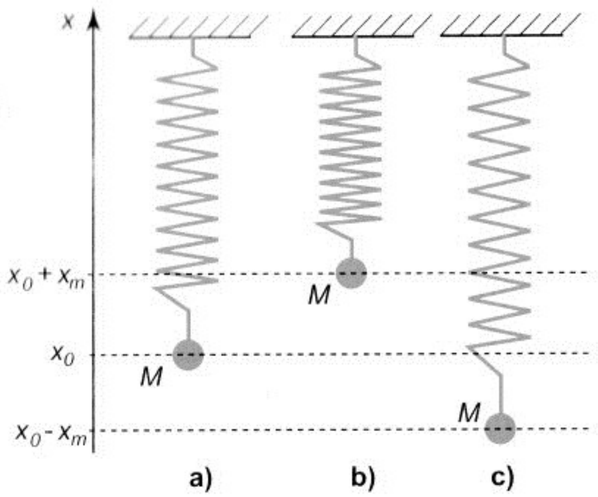
Funktsiooni $y = \cos\frac{4}{3}x$ graafikuks on seega $1\frac{1}{3}$-kordselt kokkusurutud $y = \cos x$ graafik.

Üldjuhul:

funktsioon $y = \cos kx$ on perioodiline perioodiga $\frac{2\pi}{k}$, graafikuks on k-kordselt kokkusurutud ($k > 1$ korral) või väljavenitatud ($0 < k < 1$ korral) $y = \cos x$ graafik; amplituud on 1.

Vaadeldud funktsioonide abil kirjeldatakse mitmesuguseid võnkumisi.

*Olgu näiteks ülalt jäigalt kinnitatud elastne vedru, mille alumisse otsa pannakse masspunkt M (joon. 3.29). Kui vedru panna üles-alla vabalt võnkuma, määrab x-teljel punkti M asukoha igal ajahetkel t võrrand



Joon. 3.29

$$x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right),$$

kus x_m on võnkeamplituud, s. o. maksimaalne kõrvalekalle tasakaaluasendist x_0 (joonisel 3.29a ja b), T on aeg (sekundites) ühe täisvõnke tegemiseks, s. o. võnkeperiood, t on võnkumise algusest möödunud aeg sekundites ning φ_0 on nn. algfaas, s. o. suurus, mis $t = 0$ korral määrab punkti M asukoha: $x_0 = x_m \cos\varphi_0$. Suurust $\omega = \frac{2\pi}{T}$ nimetatakse võnkesageduseks. Seega $x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)$.*

435. Konstrueerige samasse teljestikku funktsiooni $y = \sin x$ ja $y = 3\sin x$ graafik. Leidke funktsiooni $y = 3\sin x$ periood ja amplituud. Kirjutage välja selle funktsiooni nullkohad, maksimumkohad, miinimumkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond ning kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

436. Skitseerige samasse teljestikku funktsiooni $y = \cos x$, $y = -\cos x$ ja $y = -2\cos x$ graafik. Milline on iga funktsiooni periood ja amplituud? Kirjutage välja funktsioonide $y = -\cos x$ ja $y = -2\cos x$ tähtsamad punktid ja piirkonnad (vt. ülesannet 435).

437. Kasutades joonist 3.29, leidke funktsiooni $y = \sin 0{,}5x$ tähtsamad punktid ja piirkonnad.

438. Konstrueerige samasse teljestikku funktsiooni $y = \sin\frac{8}{9}x$ ning $y = 2\sin\frac{8}{9}x$ graafik. Milline on kummagi funktsiooni periood? Kas need funktsioonid on paarisfunktsioonid, paaritud funktsioonid või ei kumbki? Kirjutage välja nende funktsioonide tähtsamad punktid ja piirkonnad.

439. Lahendage eelmine ülesanne, kui funktsioonid on $y = \cos 2x$ ja $y = 1{,}5\cos 2x$.

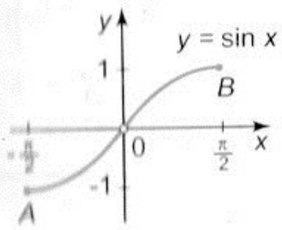
440. Konstrueerige samasse teljestikku funktsioonide $y = \tan x$ ja $y = \tan 3x$ graafikud. Millised on nende funktsioonide perioodid? Kirjutage välja funktsiooni $y = \tan 3x$ tähtsamad punktid ja piirkonnad ning asümptootide võrrandid.

441. Skitseerige funktsiooni $y = \tan\frac{x}{2}$ graafik. Milline on selle funktsiooni periood, nullkohad ja katkevuskohad, asümptootide võrrandid, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, kasvamis- ja kahanemisvahemikud?

3.17. * FUNKTSIOON $y = \arcsin x$

Funktsiooni $y = \sin x$ korral vastab argumendi x igale väärtusele üks funktsiooni väärtus, kuid iga funktsiooni väärtus vastab mitmetele (lõpmatult paljudele) argumendi väärtustele. Näiteks argumendi väärtusele $\frac{\pi}{6}$ vastab funktsiooni väärtus $\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5$, kuid funktsiooni väärtus 0,5 vastab lõpmatult paljudele argumendi väärtustele: …; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$; … . Seetõttu puudub funktsioonil $y = \sin x$ pöördfunktsioon.

Eraldame nüüd funktsioonist $y = \sin x$ sellise osa, mille korral on tegemist üksühese vastavusega, kusjuures funktsioon ($\sin x$) saab endiselt kõikvõimalike väärtusi –1-st 1-ni. Sisuliselt defineerime uue funktsiooni. Selleks sobib näiteks funktsioon, mille graafikuks on punktidega A ja B piiratud sinusoidi osa (joon. 3.30). Siin on argumendi väärtuste absoluutväärtused kõige väiksemad ja $\sin x$ saab kõiki väärtusi –1-st 1-ni, iga väärtust vaid üks kord.



Joon. 3.30

Niisiis vaatleme funktsiooni

$y = \sin x$, kus $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Selle funktsiooni muutumispiirkonnaks on lõik [–1; 1], s. o.
$-1 \le \sin x \le 1$.

Defineeritud funktsiooni pöördfunktsiooniks on nn. **arkussiinusfunktsioon**[1]
$y = \arcsin x$ (loe *arkussiinus* ***x***).

Selle funktsiooni *määramispiirkonnaks* on lõik [–1; 1] ja *muutmispiirkonnaks* lõik $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Seega, kui $-1 \le x \le 1$, siis

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}.$$

Vaadeldes funktsiooni $y = \sin x$ korral argumenti x nurgana radiaanides, on muutuja väärtuseks nurga x siinuse väärtused. Pöördfunktsiooni $y = \arcsin x$ korral on argumendi ja funktsiooni rollid võrreldes eelnevaga vahetunud: argument x on siinuse väärtus, y on aga nurk, mille siinus on x. Tähendab $\sin y = x$.

Et $y = \arcsin x$, siis

$$\sin(\arcsin x) = x, \text{ kus } |x| \le 1.$$

Näide 1.

Viimase seose põhjal on $\sin(\arcsin 0{,}8) = 0{,}8$, $\sin(\arcsin(-0{,}406)) = -0{,}406$.

Näide 2.

Leiame arcsin 0,5 ja arcsin (–1).
Lahendus.

Et arcsin 0,5 tähendab nurka lõigust $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, mille siinus on 0,5, siis $\arcsin 0{,}5 = \frac{\pi}{6}$, sest $\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5$ ja $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2}$. Analoogiliselt $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, sest $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ ja $\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2}$.

[1] *Arcus* (ladina k.) – kaar.

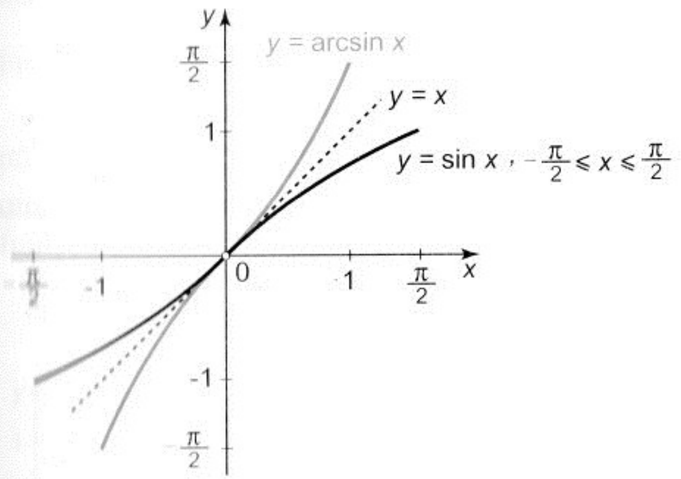
Funktsiooni[2] $y = \arcsin x$ väärtuste arvutamiseks on taskuarvutil klahv arcsin või sin^{-1} või tuleb kasutada klahvikombinatsiooni arc sin või INV sin. Seejuures peab arvuti olema radiaanides arvutamise režiimil.

Näide 3.

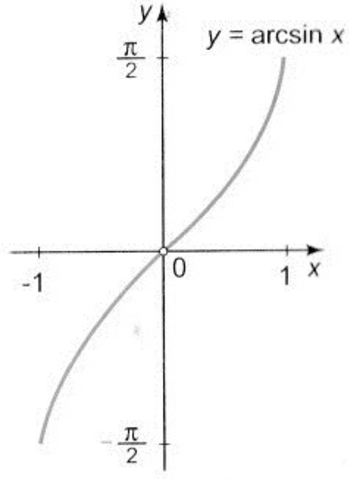
Leiame arcsin 0,3647.
Lahendus.

Olenevalt arvutist kasutame arvutusskeemi 0,3647 arcsin, 0,3647 sin^{-1}, 0,3647 arc sin või 0,3647 INV sin.
Tulemusena saame 0,3733.
Tähendab, arcsin 0,3647 = 0,3733, sin 0,3733 = 0,3647.

Nagu teame, on funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni graafikud sümmeetrilised sirge $y = x$ suhtes. Seda arvestades saame joonistada funktsiooni $y = \arcsin x$ graafiku (joon. 3.31 ja 3.32).



Joon. 3.31



Joon. 3.32

Funktsiooni $y = \arcsin x$ tähtsamad **omadused**:

1. Funktsioon on paaritu, s. t.

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

2. Funktsioonil on üks nullkoht, $x = 0$.
3. Positiivsuspiirkond on $0 < x \le 1$, negatiivsuspiirkond on $-1 \le x < 0$.
4. Kasvamispiirkond ühtib määramispiirkonnaga $-1 \le x \le 1$, kahanemispiirkond puudub.

[1] INV – lühend sõnast *inverse* (inglise k.) – ümberpööratud, vastupidine.

Näide 4.

Leiame $\cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)$.

Lahendus.

Kasutades taskuarvutit võime esmalt leida $\arcsin\frac{2}{3}$ ja seejärel saadud tulemusest (nurgast) koosinuse. Taskuarvutit kasutamata saame seda teha järgmiselt. Et $\arcsin\frac{2}{3}$ on nurk, siis tähistame selle tähega α, $\alpha=\arcsin\frac{2}{3}$. Järelikult $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ ning meil tuleb leida $\cos\alpha$. Et $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ ja $\sin\alpha>0$, siis nurk α on esimese veerandi nurk ning

$$\cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)=\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Näide 5.

Leiame $\sin(\pi+\arcsin 0{,}9)$.

Lahendus.

Võtame kasutusele tähistuse $\alpha=\arcsin 0{,}9$. Siis

$\sin(\pi+\arcsin 0{,}9)=\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\sin(\arcsin 0{,}9)=-0{,}9$.

442. Leidke

1) $\arcsin 1$; 2) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\arcsin 0$;

4) $\arcsin 0{,}5$; 5) $\arcsin 0{,}5\sqrt{2}$; 6) $\arcsin(-1)$;

7) $\arcsin(-0{,}5)$; 8) $\arcsin(-0{,}5\sqrt{3})$; 9) $\arcsin(-0{,}5\sqrt{2})$.

443. Leidke

1) $\arcsin 0{,}5073$; 2) $\arcsin 2$; 3) $\arcsin(-0{,}982)$;

4) $\arcsin 0{,}0076$; 5) $\arcsin 0{,}42$; 6) $\arcsin(-0{,}2072)$.

444. Leidke avaldise väärtus:

1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\arcsin\frac{1}{2}$;

2) $\arcsin 1+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\arcsin 0{,}0227+\arcsin(-0{,}8908)$;

4) $\arcsin(-0{,}5)-\arcsin(-0{,}5\sqrt{2})$.

445. Lahendage võrrand

1) $\arcsin x=\frac{\pi}{3}$; 2) $\arcsin x=\frac{\pi}{2}$;

3) $\arcsin x=-0{,}7854$; 4) $\arcsin x=0{,}5236$;

5) $\arcsin(x+1{,}2)=-\frac{\pi}{2}$; 6) $\arcsin(2x-3)=\frac{5\pi}{36}$.

446. Leidke

1) $\sin(\arcsin 0{,}5)$; 2) $\sin(\arcsin(-1))$;

3) $\cos(\arcsin 0{,}8)$; 4) $\cos(\arcsin(-0{,}6))$;

5) $\cos(\arcsin 5)$; 6) $\tan(\arcsin 0{,}7)$;

7) $\sin(\pi-\arcsin 0{,}21)$; 8) $\cos(2\pi-\arcsin 0{,}11)$;

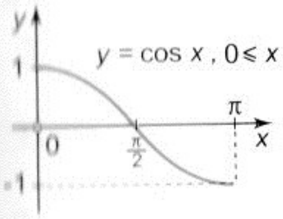
9) $\tan(\pi+\arcsin 0{,}3)$; 10) $\sin(2\arcsin 0{,}16)$.

3.18. * FUNKTSIOON $y=\arccos x$

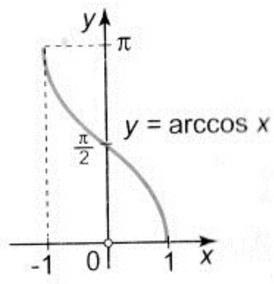
Funktsioon $y=\arccos x$ (loe *arkuskoosinus* ***x***) on funktsiooni

$y=\cos x$, kus $0\le x\le\pi$,

pöördfunktsioon, sest lõigul $0\le x\le\pi$ saab funktsioon $y=\cos x$ kõiki väärtusi oma muutumispiirkonnast, s.t. lõigust $[-1;1]$ ja vastavus argumendi ning funktsiooni väärtuste vahel on üksühene (joon. 3.33).



Joon. 3.33



Joon. 3.34

Funktsiooni $y=\arccos x$ *määramispiirkond* on $-1\le x\le 1$ ja *muutumispiirkond* on $0\le y\le\pi$ ehk

$$0\le\arccos x\le\pi.$$

Et sümbol $\arccos x$ tähendab nurka, mille koosinus on x, siis

$$\cos(\arccos x)=x,\ \text{kus}\ |x|\le 1.$$

Näide 1.

Seega on $\cos(\arccos 0,7)=0,7$ ja $\arccos 0,5=\frac{\pi}{3}$, sest $\cos\frac{\pi}{3}=0,5$ ning $0\le\frac{\pi}{3}\le\pi$.

Funktsiooni $y=\arccos x$ väärtuste arvutamiseks on taskuarvutil klahvid [arccos] või [cos^{-1}] või tuleb kasutada klahvikombinatsiooni [arc] [cos] või [INV] [cos].

Näide 2.

Taskuarvutil saame, et $\arccos(-0,2)=1,772$, kui (olenevalt arvutimargist) toimime skeemi järgi

0,2 [$^{+}/_{-}$] [arccos] või 0,2 [$^{+}/_{-}$] [cos^{-1}] või

0,2 [$^{+}/_{-}$] [arc] [cos] või 0,2 [$^{+}/_{-}$] [INV] [cos].

Funktsiooni $y=\arccos x$ graafik (joon. 3.34) saadakse funktsiooni $y=\cos x$, kus $0\le x\le\pi$, graafikust (joon. 3.33) sümmeetria teel sirge $y=x$ suhtes.

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x.$$

Tõepoolest, tähistame $\arccos x=\alpha$, siis $\cos\alpha=x$ ning $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-x$, millest $\pi-\alpha=\arccos(-x)$ ehk $\arccos(-x)=\pi-\alpha=\pi-\arccos x$.

Näide 3.

Arvutame taskuarvutit kasutamata $\tan(\arccos(-0,8))$.

Tähistame $\arccos(-0,8)=\alpha$, siis $\cos\alpha=-0,8$. Et $0\le\alpha\le\pi$ ja $\cos\alpha<0$, siis on nurk α teise veerandi nurk. Järelikult on $\tan\alpha<0$.

Seosest $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

saame, et $\tan\alpha=-\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}$.

Järelikult

$$\tan(\arccos(-0,8))=\tan\alpha=-\sqrt{\frac{1}{(-0,8)^2}-1}=-0,75.$$

447. Leidke

1) $\arccos 0$; 2) $\arccos 0,5$; 3) $\arccos 0,5\sqrt{2}$;
4) $\arccos 0,58$; 5) $\arccos 0,125$; 6) $\arccos 0,72$;
7) $\arccos(-0,1)$; 8) $\arccos(-0,6)$; 9) $\arccos(-0,38)$;
10) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; 11) $\arccos(-1)$; 12) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

448. Leidke funktsiooni $y=\arccos x$ nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, kasvamis- ja kahanemispiirkond.

449. Lahendage võrrand

1) $\arccos x=\frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos x=0$;
3) $\arccos(4x+0,4)=\pi$; 4) $\arccos(3x-1)=\frac{\pi}{10}$;
5) $\arccos x=4,7$; 6) $\arccos x=0,783$.

450. Leidke

1) $\cos(\arccos 0,8)$; 2) $\sin(\arccos 0)$;
3) $\sin(\arccos 0,6)$; 4) $\cos(\arccos 1,4)$;
5) $\sin(\arccos(-0,3))$; 6) $\tan(\arccos(-1))$;
7) $\cos(\pi-\arccos 0,7)$; 8) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos 0,9\right)$;
9) $\cos(2\arccos 0,25)$; 10) $\sin(0,5\arccos 0,2)$.

3.19. * FUNKTSIOON $y=\arctan x$

Funktsioon $y=\arctan x$ (loe *arkustangens* ***x***) on funktsiooni

$y=\tan x$, kus $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$,

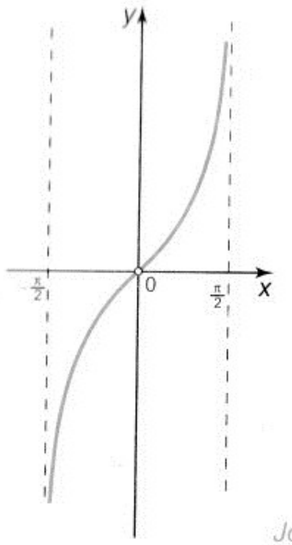
pöördfunktsioon, sest nendel argumendi väärtustel saab $\tan x$ kõiki oma muutumispiirkonna väärtusi vaid üks kord (joon. 3.35) ja vastavus argumendi ning funktsiooni väärtuste vahel on üksühene.

Funktsiooni $y=\arctan x$ *määramispiirkond* on kogu reaalarvude hulk $\mathbf{R}$, *muutumispiirkond* on $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ ehk

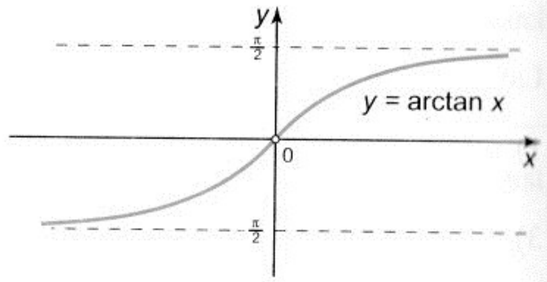
$$-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}.$$

Et sümbol arctan x tähendab nurka, mille tangens on x, siis

$$\tan(\arctan x) = x.$$



Joon. 3.35



Joon. 3.36

Näide 1.

Viimase seose põhjal on $\tan(\arctan(-10)) = -10$ ja $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, sest $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ ning $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$.

Funktsiooni $y = \arctan x$ väärtuste arvutamiseks on taskuarvutil klahvid [arctan] või [arctg] või [$\tan^{-1}$] või [tg^{-1}] või tuleb kasutada klahvikombinatsiooni [arc] [tan] või [INV] [tan].

Näide 2.

Veenduge taskuarvuti abil, et $\arctan 12{,}03 = 1{,}4879$.

Konstrueerides $y = \tan x$, kus $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ graafikuga (joon. 2.25) sümmeetrilise joone sirge $y = x$ suhtes saame funktsiooni $y = \arctan x$ graafiku (joon. 3.36).

Funktsioon $y = \arctan x$ on paaritu, s. t.

$$\arctan(-x) = -\arctan x.$$

Kui argumendi väärtused tõkestamatult kasvavad, siis funktsiooni $y = \arctan x$ väärtused kasvavad ja lähenevad väärtusele $\frac{\pi}{2}$; kui argumendi väärtused tõkestamatult vähenevad (s. t. saavad absoluutväärtuselt järjest suuremaid, kuid negatiivseid väärtusi), siis funktsiooni väärtused vähenevad ja lähenevad väärtusele $-\frac{\pi}{2}$. Tähendab, funktsioonil $y = \arctan x$ on kaks asümptooti võrranditega $y = -\frac{\pi}{2}$ ja $y = \frac{\pi}{2}$.

Näide 3.

Sõnastatud omadust on hea kontrollida taskuarvuti abil. Taskuarvuti annab, et $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}570796327$. Kui $x = 10$, on $y = \arctan 10 = \ldots = 1{,}471127674$, kui $x = 100$, on $y = 1{,}56079666$, kui $x = 900$, on $y = 1{,}56968521$, kui $x = 1500$, on $y = 1{,}57012966$, kui $x = 15000$, on $y = 1{,}57072966$, kui $x = 90000$, on $y = 1{,}570785216$. Funktsiooni väärtused lähenevad järjest enam arvule $\frac{\pi}{2}$.

Näide 4.

Arvutame taskuarvutit kasutamata $\sin(\arctan(-3))$.

Lahendus.

Tähistades $\arctan(-3) = \alpha$ saame, et $\tan\alpha = -3$ ja leida tuleb $\sin\alpha$. Avaldame $\sin\alpha$ $\tan\alpha$ kaudu:

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} \Rightarrow 1 - \sin^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}.$$

Et $\tan\alpha = -3 < 0$ ja $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, siis on α neljanda veerandi nurk ning $\sin\alpha < 0$. Tähendab,

$$\sin\alpha = -\sqrt{\frac{(-3)^2}{1+(-3)^2}} = \frac{-3}{\sqrt{10}} = -0{,}3\sqrt{10}.$$

Vastus. $\sin(\arctan(-3)) = -0{,}3\sqrt{10}$.

451. Leidke

1) $\arctan 1$; 2) $\arctan \sqrt{3}$; 3) $\arctan 0$;
4) $\arctan 2{,}65$; 5) $\arctan 0{,}04$; 6) $\arctan 99$;
7) $\arctan(-\sqrt{3})$; 8) $\arctan(-8{,}3)$; 9) $\arctan(-1)$.

452. Leidke funktsiooni $y = \arctan x$ nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond ning kasvamis- ja kahanemispiirkond.

453. Lahendage võrrand

1) $\arctan x = \pi : 6$; 2) $\arctan x = \pi : 4$;
3) $\arctan x = 0{,}5\pi$; 4) $\arctan x = 0$;
5) $\arctan x = -1{,}55$; 6) $\arctan x = -0{,}0421$;
7) $\arctan(x-4) = 0$; 8) $\arctan(5x+2{,}8) = 1{,}1$.

454. Leidke

1) $\tan(\arctan 36{,}7)$; 2) $\cos(\arctan 7)$;
3) $\cos(\arctan(-2))$; 4) $\sin(\arctan(-8))$;
5) $\tan(2\arctan 4)$; 6) $\tan(\pi - \arctan 13)$.

3.20. TRIGONOMEETRILINE VÕRRAND

Trigonomeetriliste funktsioonidega seotud ülesannete lahendamisel jõutakse sageli võrranditeni, kus tundmatu esineb trigonomeetrilise funktsiooni argumendis. Näiteks funktsiooni $y = \cos 2x + \cos x$ nullkohtade leidmiseks tuleb lahendada võrrand $\cos 2x + \cos x = 0$.

Võrrandit, milles tundmatu esineb vaid trigonomeetrilise funktsiooni argumendis, nimetatakse trigonomeetriliseks võrrandiks.

Nii on võrrandid $\cos 3x + \cos x = 0$ ja $2\sin x + 3 = 0$ trigonomeetrilised võrrandid, kuid võrrandid $2x \sin\frac{\pi}{6} + \tan\frac{\pi}{23} = 0$ ja $3x - 5\cos x = 0$ ei ole trigonomeetrilised võrrandid.

Kõige lihtsamateks trigonomeetrilisteks võrranditeks on võrrandid kujul

$\sin x = m$, $\cos x = m$ ja $\tan x = m$,

kus täht m tähistab antud arvu. Neid võrrandeid nimetatakse **trigonomeetrilisteks põhivõrranditeks.**

Keerulisemate trigonomeetriliste võrrandite lahendamine õnnestub sageli taandada ühe või mitme põhivõrrandi lahendamisele. Näiteks, selleks et lahendada võrrand

$$\sin^2 x - \frac{3}{5}\sin x - \frac{2}{5} = 0,$$

lahendatakse see esmalt $\sin x$ suhtes kui ruutvõrrand:

$$\sin x = \frac{3}{10} \pm \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{2}{5}} = \frac{3}{10} \pm \frac{7}{10},$$

$\sin x = 1$ või $\sin x = -0{,}4$.

Järgnevalt tuleb lahendada põhivõrrandid $\sin x = 1$ ja $\sin x = -0{,}4$. Kuidas seda teha, vaatleme järgmistes artiklites.

A

455. Taandage võrrandi lahendamine trigonomeetriliste põhivõrrandite lahendamisele.

1) $\tan^2 x + \tan x - 2 = 0$; 2) $4\sin^2 x - 3\sin x = 0$;
3) $50\sin^2 x - 45\sin x + 7 = 0$; 4) $\cos^3 x = 0{,}008$;
5) $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$; 6) $2\tan^2 x - 3{,}38 = 0$.

456. Teisendage võrrandit nii, et võrrand taanduks trigonomeetriliste põhivõrrandite lahendamisele.

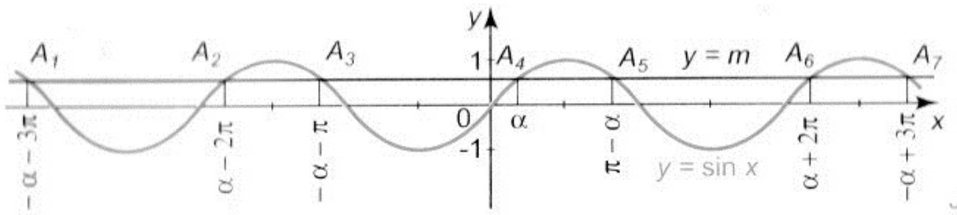
1) $1 - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0$; 2) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$;
3) $1 + \cos 2x = 0$; 4) $\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) = 0{,}4$.

3.21. VÕRRANDI $\sin x = m$ LAHENDAMINE

Võrrandil $\sin x = m$ on olemas lahendid vaid siis, kui $|m| \le 1$, sest alati on $-1 \le \sin x \le 1$.

Artiklis 3.17 leidsime võrdusest $\sin x = m$ vaid absoluutväärtuselt vähima nurga $\arcsin m$, mille siinus on m. Käesolevas artiklis seame aga eesmärgiks leida võrrandi $\sin x = m$ kõik lahendid.

Võrrandi $\sin x = m$ lahendamine tähendab geomeetriliselt joonte $y = \sin x$ ja $y = m$ lõikepunktide abstsisside leidmist. Nagu jooniselt 3.37 näeme, on neid lõpmata palju (punktide …, A_1, A_2, A_3, … abstsissid).



Joon. 3.37

Võrrandi $\sin x = m$ üheks lahendiks on nurk $\alpha = \arcsin m$, kus $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

Et täisarvu k kordse perioodi 2π lisamisel argumendile siinusfunktsiooni väärtus ei muutu, siis on võrrandi $\sin x = m$ lahendeiks kõik nurgad $x_1 = \alpha + k \cdot 2\pi$, kus $k \in \mathbf{Z}$ (joonisel 3.37 $\alpha - 2\pi$, α, $\alpha + 2\pi$).

Nurgad $\alpha + 2k\pi$, kus $k \in \mathbf{Z}$, ei haara aga võrrandi $\sin x = m$ kõiki lahendeid. Ka nurk $\pi - \alpha$ on võrrandi $\sin x = m$ lahend, sest $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha = m$.

Lisades nurgale $\pi - \alpha$ siinusfunktsiooni täisarvukordse perioodi saame, et võrrandi $\sin x = m$ lahendeiks on ka nurgad

$x_2 = (\pi - \alpha) + k \cdot 2\pi = \; = -\alpha + (2k+1)\pi$, kus $k \in \mathbf{Z}$

(joonisel 3.37 $-\alpha - 3\pi$, $-\alpha - \pi$, $\pi - \alpha$, $3\pi - \alpha$).

Jooniselt 3.37 on näha, et rohkem lahendeid kui x_1 ja x_2 võrrandil $\sin x = m$ ei ole.

Lahendeid $x_1 = \alpha + 2k\pi$ ja $x_2 = -\alpha + (2k+1)\pi$, kus $k \in \mathbf{Z}$ ning $\alpha = \arcsin m$, saab esitada üheainsa avaldisena, nn. **üldlahendina** kujul

$$\boldsymbol{x = (-1)^n \arcsin m + n\pi,}$$

kus $n \in \mathbf{Z}$. Kui võrrandi $\sin x = m$ lahendid leida kraadimõõdus, võib üldlahendi kirjutada kujul

$$\boldsymbol{x = (-1)^n \alpha + n \cdot 180°,}$$

kus $n \in \mathbf{Z}$, $-90° \le \alpha \le 90°$.

Andes tähele n mingi kindla täisarvulise väärtuse, saame üldlahendist võrrandi ühe lahendi.

Näide 1.

Lahendame võrrandid

1) $\sin x = 0$, 2) $\sin x = 0{,}6428$, 3) $\sin = -0{,}5526$.

Lahendus.

1) Et $\arcsin 0 = 0$ rad, siis $x = (-1)^n \cdot 0 + n\pi$ ehk $x = n\pi$, kus $n \in \mathbf{Z}$.

2) Siinuse väärtusele 0,6428 vastav nurk $\arcsin 0{,}6428 = 40°$. Seega on, võrrandi $\sin x = 0{,}6428$ üldlahendiks $x = (-1)^n \cdot 40° + n \cdot 180°$, kus $n \in \mathbf{Z}$.

3) Et $\arcsin(-0{,}5526) = -33°32'44''$ on üldlahend $x = (-1)^n(-33°32'44'') + n \cdot 180°$ ehk $x = (-1)^n(-1)33°32'44'' + n \cdot 180° = (-1)^{n+1}33°32'44'' + n \cdot 180°$, kus $n \in \mathbf{Z}$.

Näide 2.

Lahendame võrrandi $\sin^2 x - \frac{3}{5}\sin x - \frac{2}{5} = 0$.

Lahendus.

Leheküljel 165 leidsime, et antud võrrandi lahendamine taandub põhivõrrandite $\sin x = 1$ ja $\sin x = -0{,}4$ lahendamisele. Et $\sin 90° = 1$, siis on $\alpha = 90°$ ning võrrandi $\sin x = 1$ üldlahend $x_1 = (-1)^n 90° + n \cdot 180°$. Võrrandi $\sin x = -0{,}4$ üldlahendi saame kujul $x_2 = (-1)^{n+1} 23°34'41'' + n \cdot 180°$, sest

$\sin(-23°34'41'') = -0{,}4$.

Trigonomeetriliste võrrandite lahendamisel **tuleb üldreeglina lahendeid kontrollida**. Seda tingib esmajoones võõrlahendite tekke võimalus.

Et võrrandi $\sin x = m$ üldlahend $x = (-1)^n \alpha + n \cdot \pi$ sisaldab lahendeid $\alpha + 2k\pi$ (kui $n = 2k$) ja $(\pi - \alpha) + 2k\pi$ (kui $n = 2k\pi + 1$) ning nurk $2k\pi$ kujutab endast siinusfunktsiooni täisarvukordset perioodi, siis piisab üldlahendi kontrolliseks nurkade α ja $\pi - \alpha$ sobivuse kontrollist. Need nurgad saame üldlahendist, võttes $n = 0$ ja $n = 1$.

Kontroll näite 2 korral. Võrrandi

$$\sin^2 x - \frac{3}{5}\sin x - \frac{2}{5} = 0$$

lahendamisel leidsime, et

$x_1 = (-1)^n 90° + n \cdot 180°$ ja $x_2 = (-1)^{n+1} 23°34'41'' + n \cdot 180°$, kus $n \in \mathbf{Z}$.

Võttes $n = 0$ ja $n = 1$, saame lahendeist x_1 üheainsa nurga 90° ning lahendeist x_2 nurgad $-23°34'41''$ ja $203°34'41''$. Nagu järgnev kontroll näitab, rahuldavad need väärtused esialgset võrrandit:

$$\sin^2 90° - \frac{3}{5}\sin 90° - \frac{2}{5} = 1 - \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = 0;$$

$$\sin^2(-23°34'41'') - \frac{3}{5}\sin(-23°34'41'') - \frac{2}{5} = (-0{,}4)^2 - \frac{3}{5} \cdot (-0{,}4) - \frac{2}{5} = 0;$$

$$\sin^2 203°34'41'' - \frac{3}{5}\sin 203°34'41'' - \frac{2}{5} =$$

$$= (-\sin 23°34'41'')^2 + \frac{3}{5}\sin 23°34'41'' - \frac{2}{5} = 0.$$

Vastus. $x_1 = (-1)^n 90° + n \cdot 180°$; $x_2 = (-1)^{n+1} 23°34'41'' + n \cdot 180°$, $n \in Z$.

Näide 3.

Lahendame võrrandi $\sin(4x+2)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lahendus.

Asendame $4x+2$ uue tundmatuga u, s. t. $4x+2=u$. Siis $\sin u=\frac{\sqrt{3}}{2}$, millest $u=(-1)^n\frac{\pi}{3}+n\pi$. Minnes tagasi tundmatule x, saame seose

$$4x+2=(-1)^n\frac{\pi}{3}+n\pi.$$

Siit

$$x=-\frac{1}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{12}+n\cdot\frac{\pi}{4},\ \text{kus } n\in\mathbf{Z}.$$

Kontroll.

Juhul $n=0$ on $x=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{12}$, juhul $n=1$ aga $x=-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}=\ =-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}$.

Seega teeme kontrolli nurkade $-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{12}$ ja $-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}$ korral:

$$\sin\left[4\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{12}\right)+2\right]=\sin\left(-2+\frac{\pi}{3}+2\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\left[4\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+2\right]=\sin\left(-2+\frac{2\pi}{3}+2\right)=\sin\frac{2\pi}{3}=$$

$$=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vastus. Üldlahend on $x=-\frac{1}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{12}+n\cdot\frac{\pi}{4}$, kus $n\in\mathbf{Z}$.

Näide 4.

Lahendame võrrandi $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$.

Lahendus.

Asendame võrrandis $\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ ja viime teise liidetava paremale poole võrdusmärki. Võrrand saab nüüd kuju $\sin x=\pm\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\sin^2 x}$, millest mõlemate poolte ruutu tõstmisel

$$\sin^2 x=3(1-\sin^2 x)\Rightarrow\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Leitud põhivõrrandite üldlahendid on

$x_1=(-1)^n\frac{\pi}{3}+n\pi$ ja $x_2=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+n\pi$.

Kontroll.

Kui $n=0$, saame avaldisest x_1 väärtuse $\frac{\pi}{3}$, kui $n=1$, väärtuse $\frac{2\pi}{3}$. Neist esimene osutub lahendiks, teine aga mitte. Järelikult tuleb x_1 avaldisest kõrvale jätta võõrlahendid. Et lahend saadi $n=0$ korral, mis esindab paarisarvulisi n väärtusi, siis järelikult on lahendeiks kõik x_1 väärtused, mille korral $n=2k$, $k\in\mathbf{Z}$, s. t. lahendeiks on $x_1=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Avaldisest x_2 saame $n=0$ korral $-\frac{\pi}{3}$ ja $n=1$ korral $\frac{4\pi}{3}$, millest esimene osutub võõrlahendiks, teine aga lahendiks. Seega saame x_2 avaldisest lahendid, kui n on paaritu arv, s. t. kui $n=2k+1$, $k\in\mathbf{Z}$: $x_2=\frac{\pi}{3}+(2k+1)\pi$ ehk

$x_2=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$.

Vastus. Lahendid on $x_1=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ja $x_2=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Nagu juba oleme kogenud, ei ole trigonomeetriliste võrrandite lahendamiseks ühte kindlat võtet, on hulk erinevaid lahendusviise, millest iga kord tuleb leida sobiv. Sageli saab ühte ja sama võrrandit lahendada ka mitmel eri viisil.

Vaatleme järgnevalt eelmise näiteülesande lahendamist võttega, mis nõuab ettenägelikkust ja kogemust.

Näide 5.

Lahendame võrrandi $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$ järgmiselt: jagame võrrandit 2-ga ning arvestame, et $\frac{1}{2}=\cos 60°$ ja $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60°$. Nüüd saab võrrand kuju $\sin x\cos 60°-\cos x\sin 60°=0$ ehk $\sin(x-60°)=0$. Siit $x-60°=n\cdot 180°$ ja $x=60°+n\cdot 180°$, $n\in\mathbf{Z}$. Kõik saadud x väärtused osutuvad lahendeiks.

Näidete 4 ja 5 korral ilmneb, et ühe ja sama võrrandi erinevad lahendusviisid võivad anda väliselt erisuguseid vastuseid. Kui aga anda suurusele n täisarvulisi väärtusi, võime veenduda, et mõlemal juhul tulevad täpselt samad lahendid.

Trigonomeetriliste võrrandite lahendamise üks võte seisneb selles, et võrrandi parem pool teisendatakse nulliks ja vasak pool korrutiseks. Et korrutis on null vaid siis, kui vähemalt üks teguritest on null, siis võrdsustatakse korrutise iga tundmatut sisaldav tegur nulliga. Nii taandatakse antud võrrandi lahendamine mitme lihtsama võrrandi lahendamisele.

Näide 6.

Lahendame võrrandi $\cos 3x - \cos x = 0$.

Lahendus.

Teisendades võrrandi vasaku poole korrutiseks saame võrrandi $-2\sin 2x \sin x = 0$, millest $\sin 2x = 0$ või $\sin x = 0$. Võrrandist $\sin 2x = 0$ saame, et $x_1 = n\frac{\pi}{2}$; võrrandist $\sin x = 0$ aga $x_2 = n\pi$. Lahendite kontroll näitab, et avaldiste x_1 ja x_2 väärtused rahuldavad esialgset võrrandit.

Vastus. Võrrandi lahendid on $x_1 = n\frac{\pi}{2}$ ja $x_2 = n\pi$, kus $n \in \mathbf{Z}$.

Näide 7.

Lahendame võrrandi

$$\sin x + \frac{1}{2(\sin x - 1)} + \frac{\sin x}{2(1 - \sin x)} = 0.$$

Lahendus.

Ilmselt peab $\sin x - 1 \neq 0$ ehk $\sin x \neq 1$. Siit järeldub, et lahendeiks ei sobi muutuja väärtused $x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + n\pi$, kus $n \in \mathbf{Z}$.

Teisendame nüüd antud võrrandit järgmiselt:

$$\frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{2(\sin x - 1)} = 0,$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0, \text{ millest } \sin x = \frac{1}{2} \text{ või } \sin x = 1.$$

Vastavad üldlahendid on

$$x_1 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi \text{ ja } x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{2} + n\pi, \ n \in \mathbf{Z},$$

millest teine osutub võõrlahendiks, nagu selgitasime lahenduse alguses.

Kontroll.

Üldlahendi x_1 kontrollimiseks võtame $n = 0$ ja $n = 1$. Tulemusena saame nurgad $\frac{\pi}{6}$ ja $\frac{5\pi}{6}$, mis mõlemad rahuldavad esialgset võrrandit.

Võrrandi lahendamist oleks võinud ka kohe alustada selle teisendamisest, mille tulemusena oleks jõudnud avaldisteni x_1 ja x_2. Edasise kontrolli käigus oleks siis selgunud, et avaldis x_2 esitab vaid võõrlahendeid.

Vastus. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

497. Lahendage võrrand

1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
2) $\sin x = -\frac{1}{2}$;
3) $\sin x = 0,7808$;
4) $\sin x = -0,362$;
5) $3\sin x = 2,1$;
6) $-2\sin x = 4,6$;
7) $2\sin x + 0,0036 = 0$;
8) $\tan x = 0$;
9) $\sin x + 0,8 = 0$;
10) $2 + \sin x = 0$;
11) $\sin 3x = 0$;
12) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$;
13) $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$;
14) $\sin\left(\frac{2}{3}x + 1\right) = 1$.

498. Lahendage võrrand

1) $3\sin^2 x + 4\sin x = 0$;
2) $\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0$;
3) $\sin^3 x = 27$;
4) $\sin^3 x = -0,008$;
5) $3\cos^2 x + 4\sin x = 0$;
6) $\sin^2 2x - 1,35\sin 2x + 0,35 = 0$;
7) $5\sin^3 x - 23\sin^2 x - 10\sin x = 0$.

499. Lahendage võrrand

1) $\sin x \cos x = 0$;
2) $\sin(x + 60°) + \sin(x - 60°) = 0$;
3) $\cos x - \cos 3x = 0$;
4) $\cos 4x - \cos 2x = 0$;
5) $\frac{1 - \cos 4x}{2\sin 2x} = 1$;
6) $\frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 2x} = 1$.

500. Leidke funktsiooni nullkohad:

1) $y = \sin x - 1$;
2) $y = \sin x + 0,7$;
3) $y = 2\sin x - 0,88$;
4) $y = 3\sin 2x - 0,771$.

3.22. VÕRRANDI $\cos x = m$ LAHENDAMINE

Võrrandil $\cos x = m$ on olemas lahendid vaid siis, kui $|m| \leq 1$, sest alati on $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Võrrandi $\cos x = m$ lahendamine tähendab geomeetriliselt joonte $y = \cos x$ ja $y = m$ lõikepunktide abstsisside leidmist (joon. 3.38). Võrrandi $\cos x = m$ üheks lahendiks on nurk $\alpha = \arccos m$ $(0 \leq \alpha \leq \pi)$. Lisades nurgale α täisarvukordse koosinusfunktsiooni perioodi, saame lahendid

$x_1 = \alpha + 2k\pi$, kus $k \in \mathbf{Z}$.

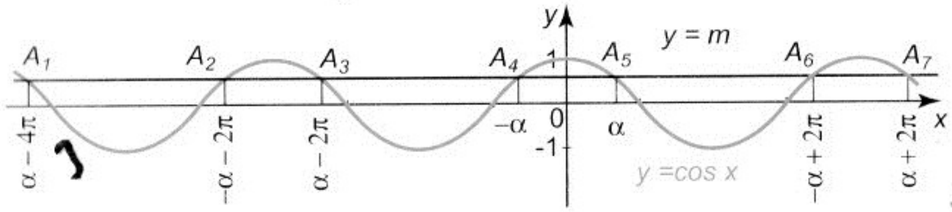
Need on joonisel 3.38 punktide …, A_1, A_3, A_5, A_7, … abstsissid.
Võrrandi $\cos x = m$ lahendiks on ka nurk $-\alpha = -\arccos m$, sest

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha = m$.

Lisades nurgale $-\alpha$ koosinusfunktsiooni täisarvukordse perioodi, saame võrrandi lahendid

$x_2 = -\alpha + 2k\pi$, kus $k \in \mathbf{Z}$.

Need on punktide …, A_2, A_4, A_6 … abstsissid. Jooniselt 3.38 on näha, et rohkem lahendeid kui x_1 ja x_2 võrrandil $\cos x = m$ ei ole. Lahendeid



Joon. 3.38

$x_1 = \alpha + 2k\pi$ ja $x_2 = -\alpha + 2k\pi$,

kus $k \in \mathbf{Z}$ ja $\alpha = \arccos m$, saab kirjutada **üldlahendina** kujul

x = ± arccos m + 2nπ,

kus $n \in \mathbf{Z}$. Kui võrrandi $\cos x = m$ lahendid leida kraadimõõdus, võib lahendivalemi kirjutada kujul

x = ± α + n · 360°,

kus $n \in \mathbf{Z}$, $0° \le \alpha \le 180°$.

Näide 1.

Leiame võrrandi $\cos x = 0{,}5$ üldlahendi ja lahendid, kui $n = -1$ ning $n = 0$.

Lahendus.

Et $\arccos 0{,}5 = \frac{\pi}{3}$, siis võrrandi üldlahend avaldub kujul $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$, kus $n \in \mathbf{Z}$. Kui $n = -1$, siis $x_1 = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3}$ ja $x_2 = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$. Kui $n = 0$, siis $x_3 = -\frac{\pi}{3}$ ja $x_4 = \frac{\pi}{3}$.

Kui trigonomeetrilise võrrandi üldlahend on saadud põhivõrrandi $\cos x = m$ lahendamisel, s. t. $x = \pm\arccos m + 2n\pi$ või $x = \pm\alpha + n \cdot 360°$, siis lahendite õigsuse kontrolliks piisab vaid nurkade α ja $-\alpha$ sobivuse kontrollimisest, sest üldlahendis on neile nurkadele lisatud vaid koosinusfunktsiooni täisarvukordne periood. Nurgad α ja $-\alpha$ saame üldlahendist, võttes $n = 0$.

Näide 2.

Lahendame võrrandi $\cos 2x + \cos\frac{3}{2}x = 0$.

Lahendus.

Teisendame võrrandi vasaku poole korrutiseks. Saadud võrrandis

$2\cos\frac{7x}{4}\cos\frac{x}{4} = 0$

$\cos\frac{7x}{4} = 0$; $\cos\frac{x}{4} = 0$.

Et $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, siis järeldub võrrandist $\cos\frac{7x}{4} = 0$, et $\frac{7x}{4} = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, millest $x_1 = \pm\frac{2\pi}{7} + \frac{8}{7}n\pi$, kus $n \in \mathbf{Z}$.

Võrrandist $\cos\frac{x}{4} = 0$ saame, et

$\frac{x}{4} = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, millest $x_2 = \pm 2\pi + 8n\pi$, kus $n \in \mathbf{Z}$.

Kontrolli teeme vaid nurkade $\pm\frac{2\pi}{7}$ ja $\pm 2\pi$ korral (kui $n = 0$):

$$\cos\left[2\left(\pm\frac{2\pi}{7}\right)\right] + \cos\left[\frac{3}{2}\left(\pm\frac{2\pi}{7}\right)\right] = \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = 2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{14} = 0;$$

$$\cos[2(\pm 2\pi)] + \cos\left[\frac{3}{2}(\pm 2\pi)\right] = \cos 4\pi + \cos 3\pi = 1 - 1 = 0.$$

Vastus. $x_1 = \pm\frac{2\pi}{7} + \frac{8}{7}n\pi$ ja $x_2 = \pm 2\pi + 8n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Näide 3.

Lahendame võrrandi $\sin x + \cos 2x = 0$ kahel erineval viisil.

Lahendus.

1) Läheme üle ühele ja samale trigonomeetrilisele funktsioonile ning teisendame siis võrrandi vasaku poole korrutiseks:

$$\sin x + \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \Rightarrow$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Seega $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0$ või $\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$,

millest vastavalt

$x_1 = \frac{\pi}{2} - 2n\pi$ ehk $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ja $x_2 = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}n\pi$, kus $n \in \mathbf{Z}$.

2) Läheme üle ühekordsele nurgale ning seejärel ainult ühele trigonomeetrilisele funktsioonile:

$\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$,

$\sin x + (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 0$,

$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.

Tulemusena saime ruutvõrrandi $\sin x$ suhtes, millest

$\sin x = 1$ ja $\sin x = -0{,}5$.

Lahendades need põhivõrrandid, saame:

$x_1 = (-1)^n \frac{\pi}{2} + n\pi$ ja $x_2 = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi$, kus $n \in \mathbf{Z}$.

Tulemusest on näha, et lahendades ühte ja sama trigonomeetrilist võrrandit erineval viisil, võib üldlahendi jaoks saada väliselt erinevad avaldised. Kui aga anda täisarvule n järjest väärtusi näeme, et avaldised $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ja $\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}n\pi$ ühelt poolt ning avaldised $(-1)^n \frac{\pi}{2} + n\pi$ ja $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi$ teiselt poolt annavad samu väärtusi (neist osa isegi kahekordselt).

Kontroll.

Ei ole raske veenduda, et nurgad $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{6}$ ja $\frac{7\pi}{6}$, mis on saadud võrrandi teisel viisil lahendatud tulemustest, võttes $n = 0$ ja $n = 1$, rahuldavad esialgset võrrandit, seega rahuldavad võrrandit ka kõik vastuses märgitud nurgad.

Vastus. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}n\pi$, kus $n \in \mathbf{Z}$

ehk $x_1 = (-1)^n \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x_2 = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi$, kus $n \in \mathbf{Z}$.

A

461. Lahendage võrrand

1) $\cos x = \frac{1}{2}$;
2) $\cos x = -\frac{1}{2}$;
3) $\cos x = -1$;
4) $\cos x = -0{,}8437$;
5) $\cos x = 0{,}06543$;
6) $2\cos x = 3{,}7$;
7) $\cos x + 0{,}67 = 0$;
8) $4\cos x - 1{,}24 = 0$.

462. Leidke funktsiooni nullkohad

1) $y = \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}$;
2) $y = \cos x + 7$;
3) $y = -3\cos x - 0{,}94$;
4) $y = 2 - 4\cos x$;
5) $y = 2(\cos x + 0{,}035)$; $-3\pi \le x \le 3\pi$;
6) $y = \frac{5}{7}\cos x - \frac{4}{9}$; $0 \le x \le 6\pi$.

463. Lahendage võrrand

1) $3\cos 2x = 0$;
2) $5 + \cos x = 4\cos x - 7$;
3) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$;
4) $\sqrt{2}\sin^2 x + \cos x = 0$;
5) $2\cos 8x = 1$;
6) $2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$;
7) $\cos^3 x = 0{,}512$;
8) $\cos^2 x + 3\cos x = 0$;
9) $\cos^2(45° + x) - \cos^2(45° - x) = 0$;
10) $2\cos^2(2x + 30°) - 3\sin(60° - 2x) + 1 = 0$.

464. Lahendage võrrand

1) $\sin 6x - \sin 4x = 0$;
2) $\cos 4x + \cos 8x = 0$;
3) $\sin\frac{2}{3}x + \sin\frac{3}{2}x = 0$;
4) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$;
5) $\sin x + \cos(90° - 2x) = 0$;
6) $\sin x + \cos x = 0$;
7) $\cos 5x - \sin 3x = 0$;
8) $\sin 6x = -\sin(-6x)$;
9) $\cos x + \cos\frac{x}{2} = 0$;
10) $\sin x + \tan x = 0$.

465. Lahendage võrrand

1) $\sin 3x\cos 2x - \cos 3x\sin 2x = 0$;
2) $\cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x = 0$;
3) $\sin 3x\sin 2x = \cos 3x\cos 2x$;
4) $\sin(360° - x) + \cos(90° + x) = 2$;
5) $\sin x\cos x = 0{,}5$;
6) $\sin 2x\tan x = 1$.

B

466. Tõestage, et 1) võrrandi $\cos x = \cos\alpha$ üldlahendi valem on $x = \pm\alpha + 2n\pi$ ja 2) võrrandi $\sin x = \sin\alpha$ üldlahendi valem on $x = (-1)^n\alpha + n\pi$, kus $n \in \mathbf{Z}$. Seejuures arvestage, et avaldis $4n \pm 1$ esitab $n \in \mathbf{Z}$ korral kõik paaritud arvud.

467. Arvestades eelmist ülesannet, lahendage võrrand

1) $\cos x = \cos 40°$;
2) $\sin x = \sin 12°19'$;
3) $\cos x = \cos\frac{7\pi}{12}$;
4) $\sin x = \sin\frac{2\pi}{15}$;
5) $\cos x = \cos 4$;
6) $\sin x = \sin 2{,}76$;
7) $\cos x = \cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)$;
8) $\sin x = \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

3.23. VÕRRANDI tan *x* = *m* LAHENDAMINE

Võrrandi $\tan x = m$ üheks lahendiks on nurk $\alpha = \arctan m$ (joon. 3.39). Et vahemikus $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ sellel võrrandil rohkem lahendeid pole, siis avalduvad võrrandi $\tan x = m$ **kõik lahendid** $m \in \mathbf{R}$ korral **üldlahendina** kujul

$x = \arctan m + n\pi$,

kus $n \in \mathbf{Z}$. Esitatuna kraadimõõdus avalduvad lahendid kujul

$x = \alpha + n \cdot 180°$,

kus $n \in \mathbf{Z}$, $-90° < \alpha < 90°$ ja $\tan\alpha = m$.

Näide 1.

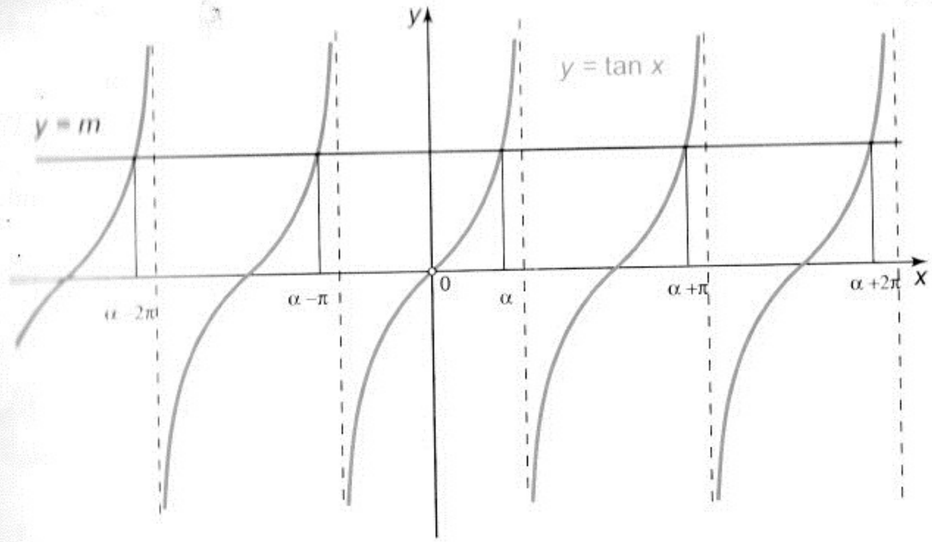
Lahendame võrrandi $\tan x = -1$.

Lahendus.

Et $\arctan(-1) = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$, siis

$x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, kus $n \in \mathbf{Z}$.

Kui trigonomeetrilise võrrandi üldlahend saadakse põhivõrrandist $\tan x = m$, s. t. üldlahendiks on $x = \alpha + n\cdot 180°$ või $x = \arctan m + n\pi$, siis tuleb lahendite kontrolliks vaid kontrollida, kas nurk α rahuldab võrrandit. See lahend saadakse üldlahendist juhul $n = 0$.



Joon. 3.39

Näide 2.

Leiame funktsiooni $y = \sqrt{3}\tan x - 2\sin x$ nullkohad.

Lahendus.

Selleks lahendame võrrandi $\sqrt{3}\tan x - 2\sin x = 0$. Teeme seda järgmiselt:

$\frac{\sqrt{3}\sin x}{\cos x} - 2\sin x = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\sin x - 2\sin x\cos x = 0 \Rightarrow$

$\sin x(\sqrt{3} - 2\cos x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ ja $x_1 = n\pi$

või $\sqrt{3} - 2\cos x = 0$ ehk $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, kus $n \in \mathbf{Z}$.

Kontroll. Kui x_1 korral $n = 0$ ja $n = 1$ ning x_2 korral $n = 0$, siis saame nurgad 0, π, $-\frac{\pi}{6}$ ja $\frac{\pi}{6}$, mis kõik rahuldavad võrrandit $\sqrt{3}\tan x - 2\sin x = 0$.

Vastus. Nullkohad on $x_1 = n\pi$ ja $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ väärtused, kui $n \in \mathbf{Z}$.

Kui trigonomeetrilise võrrandi kõik liikmed sisaldavad ühe ja sama nurga siinust, koosinust või mõlemaid ja võrrandi iga liikme korral on siinuse ja koosinuse astmete summa (liikme aste siinuse ja koosinuse suhtes) sama (vt. näide 3), siis viiakse võrrandi lahendamiseks kõik liidetavad ühele poole võrdusmärki ning võetakse koosinus astmes, mis võrdub võrrandi liikmete astmega, sulgude ette. Tulemusena saadakse võrrand, mille üks pool on korrutis ja teine pool on null. Seejuures tekivad sulgudes tangensi astmed.

Näide 3.

Lahendame võrrandi

$2\sin^2 x \cos x - 3 \sin x \cos^2 + \cos^3 x = 0$

Lahendus.

Võrrandi kõigi liikmete korral on $\sin x$ ja $\cos x$ astendajate summa 3. Võtame $\cos^3 x$ sulgude ette:

$$\cos^3 x\left(2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3\frac{\sin x}{\cos x} + 1\right) = 0.$$

Nüüd $\cos^3 x = 0$ või $2\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0$. Võrrandist $\cos^3 x = 0$ saame, et $\cos x = 0$, millest

$$x_1 = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ ehk } x_1 = (2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

Avaldise x_1 kõik väärtused osutuvad $n \in \mathbf{Z}$ korral esialgse võrrandi lahendeiks. Lahendades ruutvõrrandi $2\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0$ $\tan x$ suhtes, saame, et $\tan x = 1$ või $\tan x = 0{,}5$. Neist põhivõrrandeist

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad x_3 = 0{,}46365 + n\pi, \ n \in \mathbf{Z},$$

mis rahuldavad esialgset võrrandit.

Vastus. $x_1 = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $x_3 = 0{,}46365 + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

A

468. Lahendage võrrand

1) $\tan x = 0{,}998$;
2) $\tan x = 9$;
3) $\tan x = -2{,}0036$;
4) $\tan\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$;
5) $\tan^2 x + 0{,}6\tan x - 2{,}8 = 0$;
6) $\tan\frac{2}{3}x - \tan\frac{x}{3} = 0$;
7) $2\tan^2 x + 3\tan x + 1 = 0$;
8) $7\tan^2 5x - 8\tan 5x + 1 = 0$;
9) $3\tan x = 4\tan^2 x$;
10) $\tan^2 x = 3 + 2\tan x$.

469. Leidke funktsiooni nullkohad:

1) $y = \tan 2x$;
2) $y = \tan x - 1$;
3) $y = \tan x - \sin x$;
4) $y = \sqrt{3}\tan 4x - 1$;
5) $y = \sqrt{3} + \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;
6) $y = \tan^2 x - \sin^2 x$.

470. Lahendage võrrand

1) $4\sin^2 x - \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;
2) $\sin x\cos x + \sin^2 x - (\sqrt{3}-1)\cos^2 x = 1$;
3) $\cos^2 x\sin^2 x - 5{,}018\sin x\cos^3 x + 0{,}09\cos^4 x = 0$;
4) $16\cos^2 x - 9\sin^2 x = 0$;
5) $\sin x - 2\cos x = 0$;
6) $4\sin x + 3\cos x = 0$;
7) $\sqrt{3}\sin x = \cos x$.

471. Lahendage võrrand $\sin x + \cos x = 0$ vähemalt kolmel erineval viisil.

B

472. Lahendage võrrand, avaldades $\sin x$ ja $\cos x$ eelnevalt $\tan\frac{x}{2}$ kaudu.

1) $\sin x - \cos x = 1$;
2) $2\sin x + 3\cos x = 4$;
3) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$;
4) $\sqrt{3}\cos 2x = 2\sin x\cos x - \sqrt{3}$;
5) $24\sin x + 7\cos x = 6$;
6) $8\sin x - 15\cos x = 4$.

Enesekontrolliks

473. Arvutusi tegemata otsustage, kumb on suurem, kas

1) $0{,}9^{\sqrt{5}}$ või $0{,}9^{\sqrt{7}}$;
2) $3{,}6^{0{,}4}$ või $3{,}6^{0{,}8}$;
3) 4^{π} või 4^{e}?

474. Milline võib olla reaalarvulise astendaja korral astendatav? Miks? Aga 1) naturaalarvulise, 2) täisarvulise astendaja korral?

475. Mille poolest erineb liitprotsendiline kasvamine (kahanemine) lihtprotsendilisest kasvamisest (kahanemisest)?

476. Tooge mõni näide suuruste liitprotsendilisest kasvamisest ja kahanemisest.

477. Kui suureks kasvab 500-kroonine hoius 12 aasta jooksul, kui intress on 6%?

478. Teatud radioaktiivsest ainest laguneb ööpäevas 3%. Kui suur osa aine esialgsest kogusest on alles viie nädala pärast? Leidke selle radioaktiivse aine poolestusaeg.

479. Kuidas defineeritakse eksponentfunktsioon? Milline on eksponentfunktsiooni määramispiirkond?

480. Miks ei või eksponentfunktsiooni korral olla astendatav negatiivne? Aga null või üks?

481. Skitseerige eksponentfunktsiooni graafik. Milline suurus funktsiooni avaldises määrab, kas eksponentfunktsiooni graafik on tõusev või langev?

482. Skitseerige funktsiooni 1) $y=3^x$, 2) $y=0{,}5^x$ graafik. Millist punkti läbivad kõigi eksponentfunktsioonide graafikud?

483. Mida tähendab lause "eksponentfunktsiooni asümptoodiks on x-telg"?

484. Nimetage funktsiooni 1) $y=3^x$, 2) $y=0{,}5^x$ (vt. ül. 482) nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, kasvamis- ja kahanemisvahemik.

485. Nimetage mõni suurus, mis muutub eksponentsiaalselt? On nende korral astendatav suurem ühest või väiksem ühest?

486. Kas eksponentfunktsioonil on pöördfunktsioon? Kui *ei*, siis miks, kui *jah*, siis milline?

487. Millist võrrandit nimetatakse eksponentvõrrandiks?

488. Lahendage eksponentvõrrandid

1) $5^{2x}-120\cdot 5^x-625=0$;
2) $0{,}871^{4x+3}=0{,}871^{59}$;
3) $8^x=14263$;
4) $3^{10x}-9\cdot 3^{5x}=0$.

489. Liitmisel $a+b=c$ on vaid üks pöördtehe – lahutamine, sest leides ükskõik kumma liidetava teise liidetava ja summa kaudu, kasutame lahutamistehet ($c-a$ või $c-b$). Samuti on üks pöördtehe korrutamisel – jagamine. Mitu ja millised on aga pöördtehted astendamisel?

490. Kuidas defineeritakse arvu logaritm? Kirjutage võrdus, mis väljendab arvu logaritmi definitsiooni.

491. Leidke 1) $8^{\log_8 25}$; 2) $10^{\log 5{,}6}$; 3) $e^{\ln 100}$.

492. Kirjutage sümboleis *logaritm arvust 27,1 alusel 5 on 2,05*.

493. Milline arv tohib olla logaritmi aluseks?

494. Mis on arvu kümnendlogaritm, mis naturaallogaritm?

495. Millistel arvudel on olemas logaritm?

496. Millise arvu logaritm on 1, millise logaritm aga 0?

497. Leidke

1) $\log_5 125$;
2) $\log_4 32$;
3) $\log_3 81^{-1}$;
4) $\ln e^{0{,}405}$.

498. Leidke x, kui

1) $\log_7 x=-3$;
2) $\log_{0{,}13} x=2$;
3) $\log x=0{,}5$;
4) $\ln x=0{,}6$.

499. Leidke x, kui

1) $\log_x 121=2$;
2) $\log_x 27\sqrt{3}=7$;
3) $\log_x 4{,}95=1{,}599$;
4) $\log_x 237{,}5812=2{,}375812$.

500. *Valem $\log_a N_1N_2=\log_a|N_1|+\log_a|N_2|$ kehtib siis, kui 1) $N_1>0$ ja $N_2>0$ või 2) $N_1<0$ ja $N_2<0$. Miks ei kehti see valem siis, kui $N_1>0$ ja $N_2<0$ või $N_1<0$ ja $N_2>0$?

501. *Valem $\log_a(N_1:N_2)=\log_a N_1-\log_a N_2$ kehtib vaid siis, kui $N_1>0$ ja $N_2>0$. Kuidas peaks selle valemi kirjutama, et see kehtiks ka $N_1<0$ ja $N_2<0$ korral?

502. Arvutage arvutusvahendeid kasutamata

1) $\log 25+\log 4$;
2) $\log_8 16+\log_8 32$;
3) $\log_{0{,}2} 5+\log_{0{,}2} 125$;
4) $\log 30000-\log 30$;
5) $\log_{0{,}1} 5-\log_{0{,}1} 500$;
6) $\ln 2^{7{,}3}-\ln 2^{10}+\ln 2^{2{,}7}$.

503. Arvutage

1) $\log 100\cdot\log 1000$;
2) $\log_9 9^{-5}\cdot\log_9 9^5$;
3) $\log 12{,}3\cdot\log 68{,}4$;
4) $\dfrac{\log 100}{\log 10}$;
5) $\dfrac{\log_6 6^7}{\log_6 6^5}$;
6) $\dfrac{\ln 9}{\ln 132}$.

504. Leidke

1) $\log_5 29{,}4$;
2) $\log_{100} 1000$;
3) $\log_{0{,}75} 7{,}492$.

505. Kirjutage antud arv arvu 10 astmena ja arvu e astmena:

1) 2;
2) 1,2949;
3) 0,3167;
4) 1996.

506. Defineerige logaritmfunktsioon. Milline on logaritmfunktsiooni määramispiirkond?

507. Skitseerige logaritmfunktsiooni graafik. Kirjutage logaritmfunktsiooni asümptoodi võrrand.

508. Millist punkti läbivad kõigi logaritmfunktsioonide graafikud?

509. Millal on logaritmfunktsioon kasvav, millal kahanev?

510. Skitseerige samasse teljestikku funktsioonide $y=\log x$ ja $y=\ln x$ graafikud.

511. Skitseerige funktsiooni $y=\log_{0{,}3} x$ graafik.

512. Nimetage funktsioonide $y=\ln x$ ja $y=\log_{0{,}3} x$ nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, kasvamis- ja kahanemisvahemik.

513. Kas logaritmfunktsioonil on pöördfunktsioon? Kui *ei*, siis miks, kui *jah*, siis milline?

514. Leidke järgmise funktsiooni määramispiirkond:

1) $y = \log_5(4x+13)$; 2) $y = \log(x^2 - 5x)$; 3) $y = \ln(-x)$.

515. Lahendage võrratus

1) $\log(x-3) < 0$; 2) $\log_4 5x > 0$; 3) $\log_{0,24}(2x+9) > 0$.

516. Millist võrrandit nimetatakse logaritmvõrrandiks? Lahendage võrrandid

1) $\log^2 x + 3\log x - 10 = 0$; 2) $\log(x^2 - 6) = \log(-x)$;

3) $\log x + \log(x+2) - \log(x+4,5) = \log 2$; 4) $\log_x(4x^2) = 3$.

517. Skitseerige siinusfunktsiooni graafik. Milline on siinusfunktsiooni määramispiirkond? Muutumispiirkond? Milline on siinusfunktsiooni periood?

518. Kirjutage välja siinusfunktsiooni nullkohad, maksimumkohad ja miinimumkohad.

519. Skitseerige koosinusfunktsiooni graafik. Mille poolest erineb see siinusfunktsiooni graafikust? Milline on koosinusfunktsiooni periood?

520. Skitseerige koosinusfunktsiooni graafikuga samasse teljestikku funktsiooni $y = 2\cos x$ ja $y = \cos x - 2$ graafik.

521. Skitseerige funktsiooni $y = \tan x$ graafik. Milline on tangensfunktsiooni määramispiirkond? Muutumispiirkond? Kirjutage tangensfunktsiooni asümptootide ühine võrrand. Milline on tangensfunktsiooni periood?

522. Nimetage tangensfunktsiooni nullkohad.

523. Millist funktsiooni nimetatakse perioodiliseks funktsiooniks? Millised trigonomeetrilised seosed väljendavad tõsiasja, et trigonomeetrilised funktsioonid on perioodilised?

524. *Millised on funktsioonide $y = \sin kx$, $y = \cos kx$, $y = \tan kx$ perioodid?

525. *Millise funktsiooni pöördfunktsioon on $y = \arcsin x$? Skitseerige funktsiooni $y = \arcsin x$ graafik.

526. *Millise funktsiooni pöördfunktsioon on $y = \arccos x$? Skitseerige funktsiooni $y = \arccos x$ graafik.

527. *Millise funktsiooni pöördfunktsioon on $y = \arctan x$? Skitseerige funktsiooni $y = \arctan x$ graafik.

528. Millistes piirides muutub $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$?

529. Millist võrrandit nimetatakse trigonomeetriliseks võrrandiks? trigonomeetriliseks põhivõrrandiks?

530. Lahendage võrrand

1) $\tan^2 x - 2\tan x - 3 = 0$; 2) $\sin 2x + \sin 4x = 0$;

3) $\sin x \cdot \cos x = -1$; 4) $\cos^2 2x - \sin^2 2x = 0,8$.

4. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS JA TULETIS

4.1. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS

Vaatleme funktsiooni

$$y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}.$$

Selle määramispiirkonnaks on kogu reaalarvude hulk, välja arvatud arv –2, sest $x = -2$ korral puudub funktsioonil väärtus (jagatisel $\frac{0}{0}$ ei ole ühest tähendust). Graafiku seisukohalt tähendab see, et argumendi iga väärtuse $x \neq -2$ korral on graafikul punkt olemas, kuid $x = -2$ korral graafikul punkt puudub. Koostame antud funktsiooni väärtuste tabeli ning selle järgi graafiku.

x	–3	–2,5	–2,2	–2	–1,9	–1,5	–1	0	1	2	3
y	–4	–3,5	–3,2	puudub	–2,9	–2,5	–2	–1	0	1	2

Graafikuks osutub sirge, millel puudub üks punkt (joon. 4.1a või b). Nagu jooniselt on näha, märgitakse graafiku puuduvat punkti seest tühja väikese ringikesega (joon. 4.1a) või vahele jäänud punkti suunatud kahe vastastikuse noolega (joon. 4.1b). Et graafikuks (kogu määramispiirkonna ulatuses) on tõesti sirge, ilmneb ka sellest, et

$$\frac{x^2 + x - 2}{x + 2} = \frac{(x-1)(x+2)}{x+2} = x - 1.$$

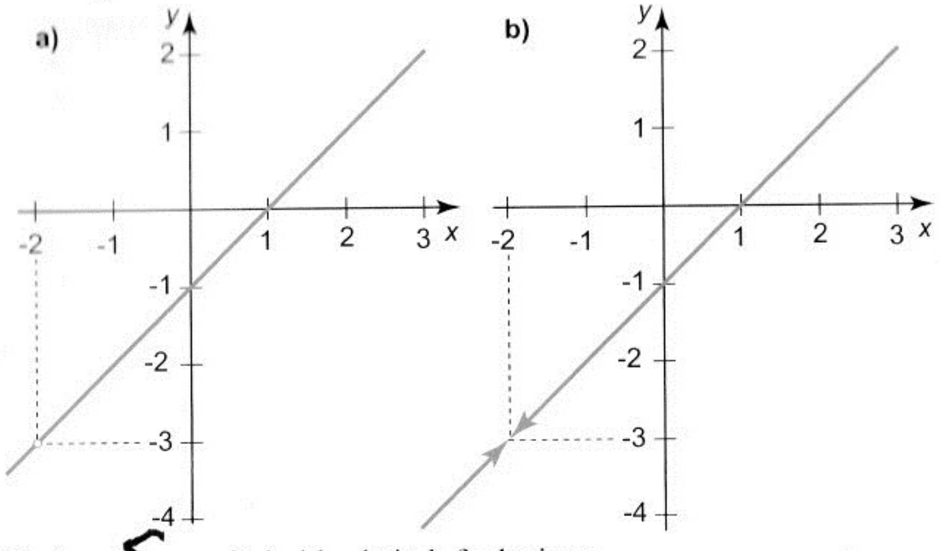
Tähendab, funktsioonide

$$y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}, \text{ kus } x \in \mathbf{R},\ x \neq -2,$$

ja

$$y = x - 1, \text{ kus } x \in \mathbf{R},$$

erinevus on vaid määramispiirkonna ühes punktis $x=-2$. Järelikult on ka nende graafikud samad, välja arvatud kohal $x=-2$.



Joon. 4.1

Uurime järgnevalt, kuidas käitub funktsioon

$$y=\frac{x^2+x-2}{x+2}$$

vahele jäänud punkti $x=-2$ ümbruses. Selleks laseme argumendi väärtustel läheneda arvule –2 ehk teisiti öeldes vaatleme argumendi x väärtuste jada, mille piirväärtus on –2, ning leiame sellele jadale vastava funktsiooni väärtuste jada:

x: –2,5; –2,1; –2,01; –2,001; –2,0001; –2,00001; … → –2.

y: –3,5; –3,1; –3,01; –3,001; –3,0001; –3,00001; … → –3.

Nagu näha, lähenevad funktsiooni väärtused tõkestamatult arvule –3 (funktsiooni väärtuste jada piirväärtus on –3). Seda situatsiooni on kujutatud ka joonisel 4.2. Lahtine on veel vaid üks küsimus: kas argumendi väärtuste **iga** jada korral, mille piirväärtus on –2, lähenevad funktsiooni väärtused arvule –3? Selle kontrolliks vaatleme veel kahte juhtu:

x: –1; –1,9; –1,99; –1,999; –1,9999; … → –2

y: –2; –2,9; –2,99; –2,999; –2,9999; … → –3

ja

x: –1; –2,5; –1,8; –1,98; –2,01; –1,998; –2,001; … → –2

y: –2; –3,5; –2,8; –2,98; –3,01; –2,998; –3,001; … → –3.

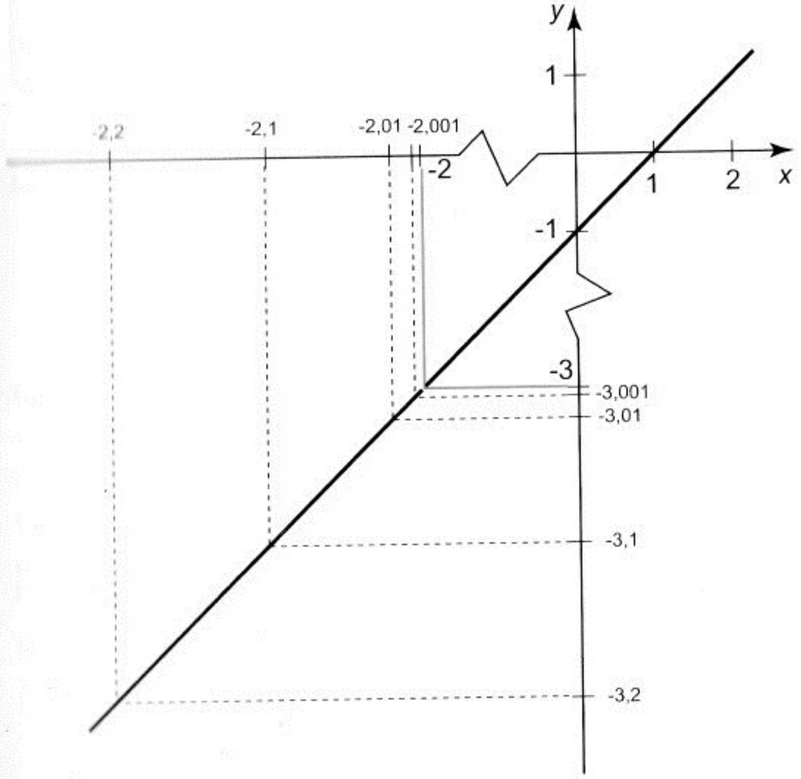
Ka nendel juhtudel $y\to -3$, kui $x\to -2$. Kuid ikkagi on kõikvõimalike argumendi väärtuste jadade korral, mille piirväärtus on –2, kontrollimata, kas vastava funktsiooni väärtuste jada piirväärtus on –3. Seda polegi tegelikult võimalik nii teha, sest selliseid argumendi väärtuste jadasid, mille piirväärtus on –2, saab moodustada lõpmatult palju. Tähendab, meie arutlusel ei ole tõestuslikku jõudu, kuid hüpoteesi ometi püstitame: kui $x\to -2$, siis $y\to -3$. Selle oletuse õigsust saab tõestada. Olgu argumendi väärtuste jada, mille piirväärtus on –2, üldliige x_n, kusjuures $x_n\neq -2$. Siis $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-2$. Leiame vastava

funktsiooni väärtuste jada üldliikme y_n. Et $x\neq -2$ korral on $y=x-1$ (saadud eespool), siis $x_n\neq -2$ korral on $y_n=x_n-1$. Nüüd saame leida ka funktsiooni väärtuste jada piirväärtuse:

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty}(x_n-1)=\lim_{n\to\infty} x_n-\lim_{n\to\infty} 1=-2-1=-3.$$

Seega tõesti,

kui $x\to -2$, siis $y\to -3$ ehk $\dfrac{x^2+x-2}{x+2}\to -3$.



Joon. 4.2.

Arvu –3 nimetatakse **funktsiooni** $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$ **piirväärtuseks** argumendi x lähenemisel arvule –2 ja kirjutatakse

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x+2}=-3.$$

Seda loetakse: *funktsiooni* $\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$ *piirväärtus, kui x läheneb –2-le (ehk kohal –2), on –3; ka liimes* $\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$*-st, kui x läheneb –2-le, on –3.*

Leiame sama funktsiooni piirväärtuse, kui $x\to 2$. Nagu funktsiooni väärtuste tabelist näha, eksisteerib $x=2$ korral funktsiooni väärtus. See on 1. Lastes nüüd x väärtustel läheneda arvule 2, lähenevad funktsiooni väärtused arvule 1, s. t.

kui $x \to 2$, siis $\dfrac{x^2+x-2}{x+2} \to 1$

ehk

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-2}{x+2} = 1.$$

Üldjuhul:

arvu *A* nimetatakse funktsiooni *y = f(x)* piirväärtuseks kohal *a*, kui igale argumendi väärtuste jadale, mille piirväärtuseks on *a*, vastab funktsiooni väärtuste jada, mille piirväärtuseks on *A*.

Sümboleis:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

ehk

kui $x \to a$, siis $f(x) \to A$.

Vaatleme funktsiooni

$$y = \cos\frac{1}{x}$$

kohal 0. Kui $x = 0$, puudub funktsioonil väärtus. Otsime funktsiooni piirväärtust kohal 0. Moodustame argumendi x väärtuste jada, mille piirväärtus on 0:

$$\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{4\pi}, \frac{1}{6\pi}, \frac{1}{8\pi}, \ldots \to 0.$$

Leiame vastava funktsiooni väärtuste jada

$$\cos 2\pi, \quad \cos 4\pi, \quad \cos 6\pi, \quad \cos 8\pi, \ldots$$

ehk

$$1, 1, 1, 1, \ldots \to 1.$$

Siit võiks teha järelduse, et funktsiooni piirväärtus kohal 0 on 1. Kontrollime asja veel kord argumendi ühe teise väärtuste jada korral:

$$\frac{1}{\pi}, \frac{1}{3\pi}, \frac{1}{5\pi}, \frac{1}{7\pi}, \ldots \to 0,$$

$$\cos\pi, \cos 3\pi, \cos 5\pi, \cos 7\pi, \ldots$$

ehk

$$-1, -1, -1, -1, \ldots \to -1.$$

Et tulemus on erinev eelnevast, saame teha vaid ühe järelduse – funktsioonil $y = \cos\dfrac{1}{x}$ kohal 0 piirväärtus puudub.

Meenutame eksponentfunktsiooni omadusest 5): 1) kui eksponentfunktsiooni $y = a^x$ $0 < a < 1$ argumendi x väärtused tõkestamatult kasvavad, siis lähenevad funktsiooni väärtused a^x tõkestamatult nullile.

2) kui eksponentfunktsiooni $y = a^x$ $a > 1$ argumendi x väärtused tõkestamatult vähenevad, siis lähenevad funktsiooni a^x väärtused tõkestamatult nullile.

Tähistades argumendi väärtuste tõkestamatut kasvamist sümboliga $x \to \infty$ ja tõkestamatult vähenemist (absoluutväärtuste tõkestamatut kasvamist) sümboliga $x \to -\infty$ võime kirjutada:

kui $0 < a < 1$ ja $x \to \infty$, siis $a^x \to 0$;

kui $a > 1$ ja $x \to -\infty$, siis $a^x \to 0$.

Lühemalt:

kui $0 < a < 1$, siis $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0$,

kui $a > 1$, siis $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

Sümbol ∞ ei tähista arvu. Seega ei tähenda kirjutised $x \to \infty$ ja $x \to -\infty$, et muutuja x väärtused lähenevad mingile arvule, vaid seda, et ($x \to \infty$ korral) x väärtused kasvavad ja saavad kuitahes suureks (liikumine arvtelje positiivses suunas) või ($x \to -\infty$ korral), et x väärtused kasvavad negatiivses suunas absoluutväärtuselt kuitahes suureks, s. t. pidevalt vähenevad (liikumine arvtelje negatiivses suunas).

Kui funktsiooni $y = f(x)$ väärtused tõkestamatult kasvavad või vähenevad, kirjutatakse samuti, et $f(x) \to \infty$, $f(x) \to -\infty$. Seega võime eksponentfunktsiooni 5. omaduse ülejäänud osas kirjutada nii (vt. ka joonist 3.2 ja 3.3):

kui $0 < a < 1$ ja $x \to -\infty$, siis $a^x \to \infty$,

kui $a > 1$ ja $x \to \infty$, siis $a^x \to \infty$.

On kokku lepitud, et ka nüüd võib kasutada sümbolit lim, kuigi tegelikult funktsioonil a^x arvuline piirväärtus puudub (∞ ei ole arv):

kui $0 < a < 1$, siis $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \infty$,

kui $a > 1$, siis $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$.

Viimaseid piirväärtuse sümboleid sisaldavaid võrdusi oleks õigem lugeda: *funktsiooni a^x väärtused kasvavad kuitahes suureks, kui ...*

*Kui $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ ehk $f(x) \to A$, kui $x \to a$, siis suurus $f(x) - A \to 0$, kui $x \to a$. Tähendab,

kui $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, siis suurus $f(x) - A$ on hääbuv suurus x lähenemisel arvule a.

Veendume selles ka ühe näite korral.

Varem leidsime, et $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x+2}=-3$. Kuna

$$f(x)-A=\frac{x^2+x-2}{x+2}-(-3)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\frac{(x+2)^2}{x+2}=x+2,$$

siis $x+2\to 0$, kui $x\to -2$ ehk $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)=0$. Tähendab, $f(x)-A$ on hääbuv-suurus x lähenemisel arvule –2.*

A

531. Moodustage veel vähemalt kaks argumendi väärtuste jada, mille piirväärtus on 2, leidke funktsiooni $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$ vastavad väärtuste jadad ning veenduge, et nende piirväärtus on 1.

532. Leidke jadade abil

1) $\lim\limits_{x\to -4}(x^2+6x)$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2}{5x^2-2}$.

533. Leidke jadade abil piirväärtus $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.

534. Veenduge, et funktsioonil $y=\dfrac{|x|}{x}$ kohal 0 piirväärtus puudub.

535. Milline on funktsiooni $y=\dfrac{|x|}{x}$ määramispiirkond? Konstrueerige funktsiooni graafik. Miks ei olnud sellel funktsioonil kohal 0 piirväärtust (vt. eelmist ül.)?

536. Leidke

1) *joonise 3.34 või jadade abil $\lim\limits_{x\to 0}\arccos x$,

2) *joonise 3.36 või jadade abil

a) $\lim\limits_{x\to 0}\arctan x$, b) $\lim\limits_{x\to \infty}\arctan x$, c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\arctan x$,

3) joonise 3.23 või jadade abil

a) $\lim\limits_{x\to 0}\tan x$, b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\tan x$, c) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\tan x$.

537. Sõnastage logaritmfunktsiooni omadused, mida väljendavad laused:

kui $a>1$, siis $\lim\limits_{x\to \infty}\log_a x=\infty$ ja $\lim\limits_{x\to 0}\log_a x=-\infty$,

kui $0<a<1$, siis $\lim\limits_{x\to \infty}\log_a x=-\infty$ ja $\lim\limits_{x\to 0}\log_a x=\infty$.

4.2. FUNKTSIOONI PIDEVUS

Kui funktsiooni $y=f(x)$ määramispiirkonda kuulub argumendi väärtus a ja

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a),$$

siis nimetatakse funktsiooni **pidevaks punktis** (ehk **kohal**) ***a***. Seega on funktsioon pidev punktis a, kui eksisteerib $f(a)$ ja $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ ning need on võrdsed.

Näide.

Funktsioon $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$

on pidev kohal 2, sest

$$f(2)=\frac{2^2+2-2}{2+2}=1 \text{ ja ka } \lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-2}{x+2}=1$$

nagu leidsime eespool.

Kui funktsioon on pidev x-telje mingi piirkonna igas punktis, siis öeldakse, et see funktsioon on **pidev piirkonnas**.

Näide.

Funktsioon $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$

on pidev lõigus $-1\le x\le 2$ ja lõigus $0\le x\le 3$. Siinusfunktsioon $y=\sin x$ on pidev kogu määramispiirkonnas **R**.

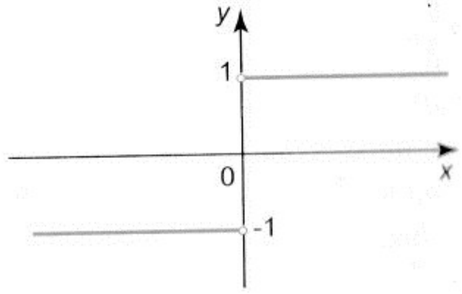
Geomeetriliselt avaldub funktsiooni pidevus x-telje mingis piirkonnas selles, et funktsiooni graafikut on võimalik selle piirkonna ulatuses joonestada ühe tõmbega, s. t. joonestusvahendit paberilt võtmata. Niimoodi saab joonistada näiteks sinusoidi osa x-telje iga piirkonna ulatuses, põhimõtteliselt ka kogu $y=\sin x$ määramispiirkonna ulatuses.

Kui funktsioon $y=f(x)$ ei ole kohal a määratud, s. t. ei eksisteeri $f(a)$, kuid funktsioon on määratud koha (punkti) a igas vasak- ja parempoolses "naaberpunktis", täpsemalt öeldes punkti a igas kuitahes väikeses ümbruses, siis öeldakse, et funktsioon on **kohal** (või **punktis**) ***a* katkev**. Arvu a nimetatakse funktsiooni **katkevuskohaks**.

Näiteks funktsioonil

$$y=\frac{x^2+x-2}{x+2}$$

on katkevuskoht $x=-2$ (joon. 4.1).



Joon. 4.3

Katkevuskoha ümbruses võib funktsioon (ja graafik) käituda väga mitmeti. Näiteks viimati nimetatud funktsiooni korral (joon. 4.1) läheb graafik (sirge) pärast katkemist nagu samast kohast edasi. Ta jätab vaid sirgest $y = x - 1$ punkti $(-2; 3)$ vahele. Funktsiooni $y = \frac{|x|}{x}$ korral (joon. 4.3) on katkevuskohaks $x = 0$, kuid siin teeb funktsioon hüppe väärtuselt -1 väärtusele 1. Tangensfunktsiooni $y = \tan x$ korral (joon. 3.23) on katkevuskohtadeks $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. Siin teevad tangensfunktsiooni väärtused hüppe ∞-st $-\infty$-sse.

A

538. Leidke funktsiooni katkevuskohad

1) $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$; 3) $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$;

4) $y = \frac{2}{x + 3}$; 5) $y = \frac{x - 3}{x + 4}$; 6) $y = \frac{x^2 - 5}{x^2 + 2x - 15}$.

539. Konstrueerige eelmises ülesandes antud funktsioonide graafikud üksikute punktide järgi. Leidke iga funktsiooni määramispiirkond, nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, kasvamis- ja kahanemisvahemikud. Millistel argumendi väärtustel on funktsioonil ekstreemumid ja kui suured need on?

4.3. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUSE ARVUTAMINE

Nagu veendusime, on tülikas leida funktsiooni piirväärtust definitsiooni abil. Piirväärtuse arvutamiseks kasutatakse tavaliselt funktsiooni piirväärtuse omadusi ning teatud praktilisi võtteid.

Nagu varem selgitasime, on

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

kui funktsioon on kohal a pidev. See võrdus võimaldab lihtsalt leida funktsiooni piirväärtust kohal a, kui $a \in \mathbf{X}$.

Näide 1.

Leiame $\lim_{x \to 2}(5x^2 - 4x + 1)$.

Lahendus.

Et funktsiooni $y = 5x^2 - 4x + 1$ graafikuks on pidev joon – parabool, siis on funktsioon pidev ka kohal 2 ning

$$\lim_{x \to 2}(5x^2 - 4x + 1) = 5 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 20 - 8 + 1 = 13.$$

Mõningaid piirväärtusi saame leida ka loogilise arutelu teel. Näiteks

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Tõepoolest, kui murru $\frac{1}{x^2}$ nimetaja läheneb nullile, näiteks x väärtused on 1; 0,1; 0,01; 0,001; ...; siis $\frac{1}{x^2}$ väärtused kasvavad üle igasuguse tõkke (s. t. kuitahes suureks): 1; 100; 10000; 1000000; ... . Kui aga murru $\frac{1}{x}$ nimetaja kasvab tõkestamatult, näiteks x saab väärtusi 1, 1000, 1 000 000, 1 000 000 000, ..., siis murru väärtused lähenevad nullile: 1; 0,001; 0,000001; 0,000000001; ... .

Funktsiooni piirväärtuse arvutamisel on sageli kasulik tunda **piirväärtuse omadusi**. Et funktsiooni piirväärtus on defineeritud jada piirväärtuse abil, siis on loomulik, et funktsiooni piirväärtuse omadused on samasugused kui jada piirväärtusel:

1. $\lim_{x \to a} c = c$.

Kui eksisteerivad piirväärtused $\lim_{x \to a} f(x)$ ja $\lim_{x \to a} g(x)$ siis eksisteerib ka funktsioonide summa vahe, korrutise, jagatise ja arvuga korrutatud funktsiooni piirväärtus ning

2. $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$,

3. $\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$,

4. $\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$,

5. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, **kui** $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$,

6. $\lim_{x \to a}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$.

Need omadused kehtivad ka siis, kui $x \to \infty$ või $x \to -\infty$.

Näide 2.

Leiame $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+\tan x}{x-3}$.

Lahendus.

Rakendame funktsiooni piirväärtuse omadusi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\tan x}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\tan x)}{\lim\limits_{x\to 0}(x-3)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos x+\lim\limits_{x\to 0}\tan x}{\lim\limits_{x\to 0}x-\lim\limits_{x\to 0}3}=\frac{\cos 0+\tan 0}{0-3}=\frac{1+0}{-3}=-\frac{1}{3}.$$

Näide 3.

Leiame $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}$.

Lahendus.

Et $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, siis $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}=5\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=5\cdot 0=0$.

Esineb olukordi, kus piirväärtuse omadusi ei saa vahetult rakendada. Näiteks leides piirväärtust $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ saame $\dfrac{0}{0}$, kui $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ ja $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$. Sellist juhtumit $\dfrac{0}{0}$ nimetatakse **määramatuseks**, sest esialgu ei ole teada, (ei ole määratud), millega see võrdub. Määramatusi on teisigi, näiteks $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Määramatus $\dfrac{0}{0}$. Sellel juhul tuleb murdu $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ teisendada nii, et murdu saab taandada teguriga, mis tekitab määramatuse, mis muudab piirprotsessis nii lugeja kui ka nimetaja nulliks. Lühemalt: tuleb püüda vabaneda määramatusest.

Näide 4.

Leiame $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$.

Lahendus.

Lootes, et funktsioon $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ on kohal –2 pidev, püüame leida piirväärtust näite 1 eeskujul:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{0}{0}.$$

Tulemuseks on määramatus. Järelikult peame funktsiooni avaldist nii teisendama, et vabaneksime määramatusest:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4.$$

Näide 5.

Leiame $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$.

Lahendus.

Ka siin annab näite 1 eeskujul arvutamine määramatuse:

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\frac{9-9}{3-3}=\frac{0}{0}.$$

Korrutame murru lugejat ja nimetajat teguriga $\sqrt{x}+3$. Siis

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{\cancel{(x-9)}(\sqrt{x}+3)}{\cancel{x-9}}=$$

$$\lim_{x\to 9}(\sqrt{x}+3)=\sqrt{9}+3=6.$$

Määramatus $\dfrac{\infty}{\infty}$ tekib $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ piirväärtuse leidmisel, kui lugeja ja nimetaja piirprotsessis tõkestamatult kasvavad. Kuidas nüüd vabaneda määramatusest, selgub näiteist.

Näide 6.

Leiame $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^6-4x^2+8}{2x^6+4x^5-x}$.

Lahendus.

Püüdes rakendada piirväärtuse omadusi jõuame määramatusele $\dfrac{\infty}{\infty}$. Et sellest vabaneda, jagame murru lugejat ja nimetajat liikmeti x kõige kõrgema astmega, s. o. avaldisega x^6. See on praegu lubatud, sest $x\neq 0$, kuna ta kasvab tõkestamatult. Niisiis

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^6-4x^2+8}{2x^6+4x^5-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5x^6-4x^2+8}{x^6}}{\dfrac{2x^6+4x^5-x}{x^6}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{8}{x^6}}{2+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^5}}.$$

Rakendades nüüd piirväärtuse omadusi saame, et

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^6}}{2+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^5}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}5-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^6}}{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^5}}=\frac{5-0+0}{2+0-0}=2{,}5.$$

Vastus. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^6-4x^2+8}{2x^6+4x^5-x}=2{,}5.$

Näide 7.

Leiame $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^3+2x-1}$.

Lahendus.

Tekib määramatus $\dfrac{\infty}{-\infty}$. Jagame murru lugeja ja nimetaja avaldisega x^3:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-5x}{x^3+2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}x-0}{1+0+0}=-\infty.$$

A

540. Leidke piirväärtus

1) $\lim\limits_{x\to2}5x^3$;
2) $\lim\limits_{x\to0{,}3}(x^3-2x-1)$;
3) $\lim\limits_{x\to25}4\sqrt{x}$;
4) $\lim\limits_{x\to-1}\left(2x^2-\dfrac{1}{x}+3\right)$;
5) $\lim\limits_{x\to-3}2^x$;
6) $\lim\limits_{x\to100}\log x$;
7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x$;
8) $\lim\limits_{x\to-2{,}2}\tan x$;
9) $\lim\limits_{x\to0}0{,}4^x$;
10) $\lim\limits_{x\to0}7x^3$;
11) $\lim\limits_{x\to\infty}3x$;
12) $\lim\limits_{x\to0}(x-4)$;
13) $\lim\limits_{x\to-\infty}8x$;
14) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{7}$;
15) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^6$;
16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{13}{x^4}$;
17) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{50}{x}$;
18) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+x)$.

541. Leidke piirväärtus

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+5}{x-2}$;
2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+5}{(x-2)^2}$;
3) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x+5}{x-2}$;
4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x+2}$;
5) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x}{x+8}$;
6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{1+x}$.

542. Leidke piirväärtus

1) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$;
2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2-x}{x}$;
3) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2-2x-35}{6(x+5)}$;
4) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x-2}$.

543. Leidke piirväärtus

1) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$;
2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{8-x^3}{3-\sqrt{x^3+1}}$;
3) $\lim\limits_{x\to25}\dfrac{\sqrt{x}-5}{x-25}$;
4) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{4x-6}{2\sqrt{x}-2}$.

544. Leidke piirväärtus. Kas märkate seaduspärasust, kuidas selliseid piirväärtusi leida peast?

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+7x^2-4x}{2x^2-8x+5}$;
2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+2x^3}{3x^2-5}$;
3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^4+x+2}{x^6+3x^3}$;
4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+6x}{3x^2}$;
5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{16+x^3}{x^5-2x^4}$;
6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{27x^2-11}{6x^2+5x}$;
7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^4}{x^3+10}$;
8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^5}{x^2+x^4}$;
9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x+1000}$;
10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^6+2}$.

4.4. KAKS OLULIST PIIRVÄÄRTUST

Matemaatikas on mõningatel piirväärtustel eriline tähendus. Üheks selliseks on eespool leitud

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},\ n\in\mathbf{N}.$$

Osutub, et ka

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},\ x\in\mathbf{R}.}$$

Tundes seda piirväärtust, saab näidata, et

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{r}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}^{r}.$$

Tõepoolest,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{r}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{r}}\right)^{\frac{x}{r}\cdot r}=\lim_{\frac{x}{r}\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{r}}\right)^{\frac{x}{r}}\right]^{r}=\lim_{u\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{r}=\mathrm{e}^{r}$$

$\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\to\mathrm{e}$, kui $u\to\infty$.

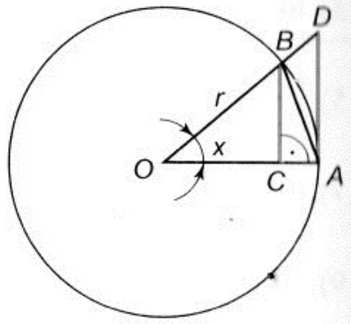
Näide 1.

1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}^{3}$, 2) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}^{-1}$.

Vaatleme piirväärtust $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$.

Ülesande 533 lahendamisel võisime veenduda, et

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$



Joon. 4.4

Tõestame selle võrduse. Joonestame ringi raadiusega r ning sellesse kesknurga $\angle AOB=x$ rad, kus $0<x<\frac{\pi}{2}$ (joon. 4.4). Ühendame punktid A ja B ning joonestame tekkinud kolmnurga ABO kõrguse BC. Järgnevalt joonestame täisnurkse kolmnurga ADO, kus $AD\perp OA$.

Kolmnurga OBA pindala S_1, sektori OBA pindala S_2 ja kolmnurga ODA pindala S_3 rahuldavad võrratusi

$S_1<S_2<S_3$.

Avaldame need pindalad ringi raadiuse r ja kesknurga x kaudu. Kolmnurgas OBC on $CB=r\cdot\sin x$ ja

$$S_1=\frac{OA\cdot CB}{2}=\frac{r\cdot r\cdot\sin x}{2}=0{,}5r^{2}\sin x.$$

Sektori pindala

$S_2=0{,}5xr^{2}$.

Kolmnurgas ODA on $AD=OA\cdot\tan x=r\cdot\tan x$ ja

$$S_3=\frac{OA\cdot AD}{2}=\frac{r\cdot r\cdot\tan x}{2}=0{,}5r^{2}\tan x.$$

Et $S_1<S_2<S_3$, siis

$0{,}5r^{2}\sin x<0{,}5r^{2}x<0{,}5r^{2}\tan x$

ehk

$\sin x<x<\tan x$.

Kuna $\sin x>0$, siis saame viimaste võrratuste jagamisel avaldisega $\sin x$ võrratused

$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$, millest $1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$.

Kui nüüd $x\to0$, siis $\cos x\to1$ ning suurus $\frac{\sin x}{x}$ jääb arvu 1 ja arvule 1 läheneva suuruse vahele. Järelikult

$\frac{\sin x}{x}\to1$, kui $x\to0$ ehk $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Seni eeldasime, et $x>0$. Saab näidata, et ka $x<0$ korral on tulemus sama. Seega

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Näide 2.

Leiame $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$.

Lahendus.

Kui $x\to0$, tekib määramatus $\frac{0}{0}$. Vabaneme sellest:

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$$

Vastus. $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$.

Näide 3.

Leiame $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{2x}$.

Lahendus.

Piirväärtuse vahetul leidmisel jõuame määramatusele $\frac{0}{0}$. Vaatleme kahte võimalust sellest vabanemiseks.

1. Tähistame $u = 3x$, siis $x = \frac{u}{3}$. Kui $x \to 0$, siis ka $u \to 0$. Järelikult

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{\frac{u}{3}} = \frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\frac{3\sin u}{u} = \frac{3}{2}\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = \frac{3}{2}.$$

2. Leiame piriväärtuse järgmiselt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2}\cdot\lim_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Võrdusest $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

järeldub, et küllalt väikeste $(x \to 0)$ radiaanides mõõdetud nurkade x korral on

$\frac{\sin x}{x} \approx 1$ ehk

sin x ≈ x, kui x on küllalt väike nurk radiaanides.

Näide 4.

1) sin 0,0504 = 0,05038; 2) sin 0,0023 = 0,002299998.

Näite 2 põhjal saame, et

tan x ≈ x, kui x on küllalt väike nurk radiaanides.

Praktiliselt võib lugeda $\sin x = x$ ja $\tan x = x$, kui $0 \le x \le 0{,}0873$.

B

545. Leidke piirväärtus

1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$; 2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$; 3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^x$.

546. Leidke piirväärtus

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$; 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}$; 3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{10x}$;

4) $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{x}$; 5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\tan x}{x^2}$.

547. Leidke trigonomeetrilise funktsiooni väärtus ning võrrelge seda vastava argumendi väärtusega:

1) sin 0,0452; 2) sin 0,0066; 3) sin 0,001;
4) tan 0,0707; 5) tan 0,01001; 6) tan 0,0004.

4.5. * ASÜMPTOODID

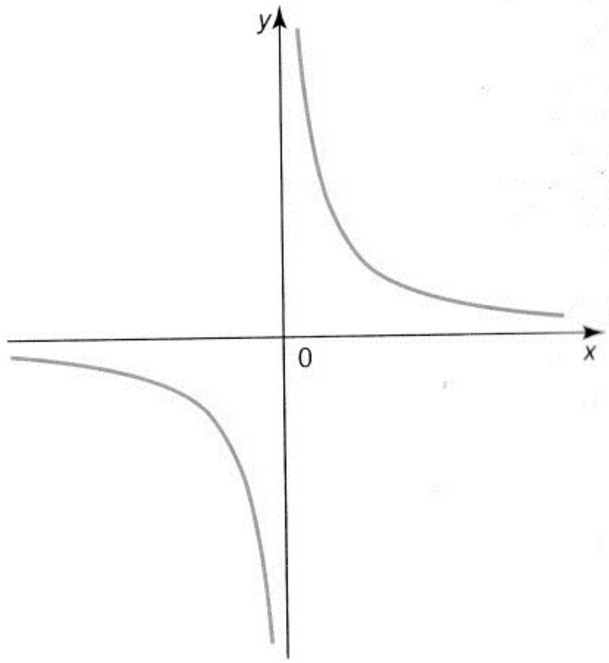
Funktsiooni piirväärtus leiab matemaatikas mitmesugust rakendamist. Neist üks on funktsiooni graafiku (joone) püst- ja rõhtasümptoodi leidmine.

Kui $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ (s. t. $+\infty$ või $-\infty$), siis funktsiooni $y = f(x)$ graafikul on püstasümptoot, mille võrrand on $x = a$.

Näide 1.

Funktsioonil $y = \frac{1}{x}$ (joon. 4.5) on püstasümptoot $x = 0$, sest $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \pm\infty$ (kui $x \to 0-$, s. t. x läheneb nullile vasakult, siis $-\infty$; kui $x \to 0+$, s. t. x läheneb nullile paremalt, siis $+\infty$). Funktsioonil $y = \tan x$ on lõpmatult palju püstasümptoote, mille võrrandid on $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, kus $n \in \mathbf{N}$, sest $\lim_{x\to(2n+1)0-}\tan x = +\infty$ ja $\lim_{x\to(2n+1)\frac{\pi}{2}+}\tan x = -\infty$ (joon. 3.23).

Funktsioonil $y = \log_a x$ on püstasümptoodiks y-telg, $x = 0$.



Joon. 4.5

Kui $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ (s. t. $x \to +\infty$ või $x \to -\infty$), siis on funktsiooni $y = f(x)$ graafikul rõhtasümptoot, mille võrrandiks on $y = b$.

Näide 2.

Funktsioonil $y = \frac{1}{x}$ (joon. 4.5) on rõhtasümptoot $y = 0$, sest $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0$.

Samuti on rõhtasümptoot $y = 0$ eksponentfunktsiooni $y = a^x$ graafikul (joon. 3.2 ja 3.3), sest

$\lim_{x\to\infty} a^x = 0$, kui $a > 1$ ja $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, kui $0 < a < 1$.

Rõhtasümptoodid $y = \frac{\pi}{2}$ ja $y = -\frac{\pi}{2}$ on funktsiooni $y = \arctan x$ graafikul (joon. 3.36), sest $\lim_{x\to\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}$ ja $\lim_{x\to-\infty}\arctan x = -\frac{\pi}{2}$.

548. Leidke funktsiooni püst- ja rõhtasümptoot, kui need on olemas:

1) $y=\dfrac{1}{x+1}$; 2) $y=x^{-2}$; 3) $y=\dfrac{5x}{x-4}$.

4.6. FUNKTSIOONI MUUT

Olgu antud mingi pidev funktsioon $y=f(x)$, mille argumendi üks väärtus (loeme esialgseks ehk algväärtuseks) on x_1 ja teine väärtus (lõppväärtus) on x_2. Väärtuste vahet x_2-x_1 nimetatakse **argumendi muuduks** (täpsemalt argumendi väärtuse muuduks) ning tähistatakse sümboliga[1] Δx (loe *delta x*). Seega

$\Delta x=x_2-x_1$.

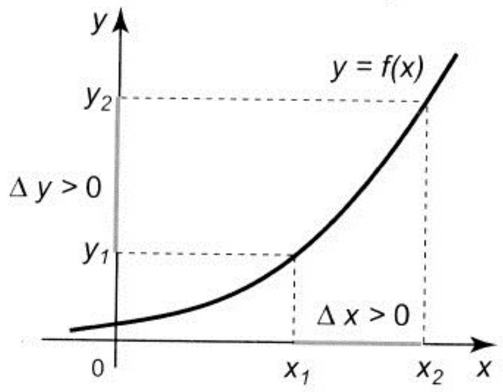
Siit $x_2=x_1+\Delta x$. Muut Δx võib olla nii positiivne kui ka negatiivne (joon. 4.6).

Joon. 4.6

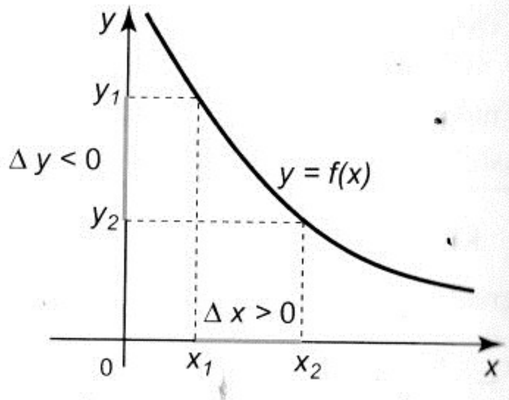
Argumendi igale väärtusele vastab funktsiooni väärtus ja argumendi muudule vastab **funktsiooni muut** (joon. 4.7). Seda tähistatakse sümboliga Δy ning

$\Delta y=y_2-y_1=f(x_2)-f(x_1)$.

Ka Δy võib olla nii positiivne (joon. 4.7) kui ka negatiivne (joon. 4.8), kuid ka null.



Joon. 4.7



Joon. 4.8

Näide 1.

Leiame argumendi ja funktsiooni muudu, kui $y=3x^2-1$ ning $x_1=3$ ja $x_2=5$.

Lahendus.

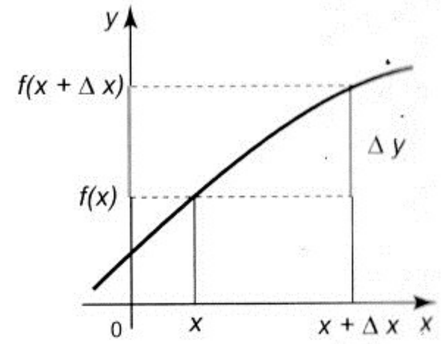
Argumendi muut $\Delta x=5-3=2$. Sellele vastav funktsiooni muut

$\Delta y=y_2-y_1=(3\cdot5^2-1)-(3\cdot3^2-1)=(75-1)-(27-1)=48$.

[1] Δ – kreeka tähestiku neljas suurtäht *delta*.

Tuletame üldise valemi funktsiooni muudu leidmiseks argumendi väärtuse ja argumendi muudu järgi. Olgu argumendi väärtus x ja muut Δx. Argumendi lõppväärtus on siis $x+\Delta x$ (joon. 4.9). Neile vastavad funktsiooni väärtused $f(x)$ ja $f(x+\Delta x)$, seega on

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.



Joon. 4.9

See valem annab **funktsiooni $y=f(x)$ muudu Δy** (täpsemalt funktsiooni väärtuse muudu) **kohal x** ehk **punktis x**.

Näide 2.

Leiame funktsiooni $y=2x^2+3x-4$ muudu üldavaldise.

Lahendus.

Et üldjuhul $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, $f(x+\Delta x)=2(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)-4$ ja $f(x)=2x^2+3x-4$, siis antud funktsiooni korral on

$\Delta y=[2(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)-4]-(2x^2+3x-4)=$

$=2x^2+4x\Delta x+2(\Delta x)^2+3x+3\Delta x-4-2x^2-3x+4=$

$=4x\Delta x+3\Delta x+2(\Delta x)^2$.

Vastus. $\Delta y=4x\Delta x+3\Delta x+2(\Delta x)^2$.

Näide 3.

Arvutame funktsiooni $y=2x^2+3x-4$ (vt. näide 2) muudu 1) kohal $x=0$, kui $\Delta x=2$ ja 2) kohal $x=2{,}2$, kui $\Delta x=0{,}9$.

Kasutame eelmises näites tuletatud valemit $\Delta y=4x\Delta x+3\Delta x+2(\Delta x)^2$:

1) $\Delta y=4\cdot0\cdot2+3\cdot2+2\cdot2^2=14$;

2) $\Delta y=4\cdot2{,}2\cdot0{,}9+3\cdot0{,}9+2\cdot0{,}9^2=12{,}24$.

Kui leida suhe $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, saame argumendi ühe ühiku kohta tuleva funktsiooni väärtuse muutuse. See on aga funktsiooni väärtuse muutumise keskmine kiirus (alates argumendi väärtusest x piirkonna Δx ulatuses).

Näide 3 andmetel on juhul 1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{14}{2}=7$ ja juhul 2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{12,24}{0,9}=13,6$.

Tähendab, lõigul $[0; 2]$ on funktsiooni $y=2x^2+3x-4$ muutumise keskmine kiirus väiksem kui lõigul $[2,2; 3,1]$. See ilmneks ka funktsiooni $y=2x^2+3x-4$ graafikult, sest parabooli tipu $(x_0=-0,75)$ läheduses $(x=0)$. kasvavad (tähendab ka muutuvad) funktsiooni väärtused aeglasemalt kui sellest kaugemal ($x=2,2$ korral).

Näide 4.

Keha vabal langemisel on läbitud tee pikkus $s=\frac{gt^2}{2}$, kus $g=9,8$ m/s^2 ja t on aeg sekundites. Leiame funktsiooni $s=\frac{gt^2}{2}$ muudu valemi:

$$\Delta s=\frac{g(t+\Delta t)^2}{2}-\frac{gt^2}{2}=\frac{g}{2}[2t\Delta t+(\Delta t)^2].$$

See valem võimaldab arvutada läbitud tee pikkust Δs alates hetkest t Δt sekundi jooksul. Kuid need andmed võimaldavad leida ka keskmise kiiruse $v_k=\frac{\Delta s}{\Delta t}$ alates hetkest t Δt sekundi jooksul. Leiame näitena, kui palju langeb keha ja millise keskmise kiirusega 1) alates hetkest $t=0$ $\Delta t=2$ sekundi jooksul, 2) kui $t=10$ ja $\Delta t=3$. Et

1) $t=0$ ja $\Delta t=2$, siis $\Delta s=2g=19,6$ m, $v_k=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{19,6}{2}=9,8$ m/s;

2) $t=10$ ja $\Delta t=3$, siis $\Delta s=\frac{69g}{2}=338,1$ m, $v_k=\frac{\Delta s}{\Delta t}=112,7$ m/s.

Definitsiooni järgi on funktsioon $y=f(x)$ kohal a pidev, kui

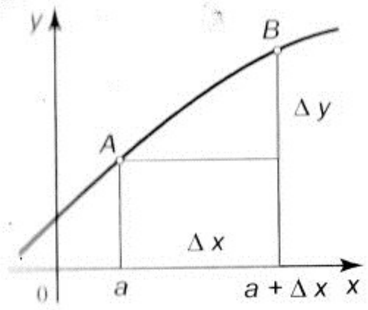
1) kohal a on funktsioonil väärtus, s. t. on $f(a)$,

2) kohal a on funktsioonil piirväärtus, s. t. on $\lim\limits_{x\to a} f(x)$,

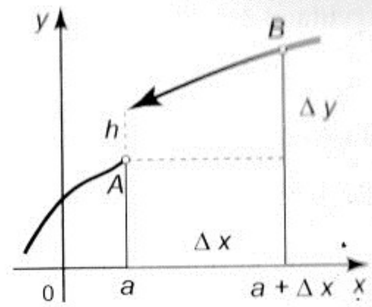
3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Selgub, et funktsiooni $y=f(x)$ pidevusest kohal a järeldub, et kohal a $\Delta y\to 0$, kui $\Delta x\to 0$ (joon. 4.10). Tõepoolest, kui kehtib võrdus $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, siis tingimusest $x\to a$ järeldub, et $\Delta x=x-a\to 0$ ning seega $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)\to 0$.

Osutub, et kehtib ka vastupidi: kui kohal a $x-a\to 0$, s. t. $\Delta x\to 0$ ja sellest tulenevalt ka $f(x)-f(a)\to 0$, s. t. $\Delta y\to 0$, siis on funktsioon $y=f(x)$ kohal a pidev.



Joon. 4.10



Joon. 4.11

Kokkuvõtteks:

Funktsioon $y=f(x)$ on pidev kohal a siis ja ainult siis, kui argumendi muudu Δx lähenemisel nullile läheneb ka vastav funktsiooni muut $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$ nullile, s. t. kui $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Kui funktsioon on katkev kohal a, siis võib tal sellel kohal väärtus puududa ning Δy leidmine ei ole seega võimalik. Kui aga funktsioonil on kohal a väärtus, kuid funktsioon teeb siin hüppe (joon. 4.11), siis ei saa Δy läheneda tõkestamatult nullile, kui $x\to 0$, sest $\Delta y>h$ ja nagu näha, on funktsiooni graafik jälle katkev.

***Näide 5.**

Uurime funktsiooni (vt. näide 2) $y=2x^2+3x-4$ pidevust.

Lahendus.

Funktsiooni muut $\Delta y=4x\Delta x+3\Delta x+2(\Delta x)^2$. Et

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[4x\Delta x+3\Delta x+2(\Delta x)^2]=0$ argumendi x iga väärtuse korral, siis vaadeldav funktsioon on pidev kogu määramispiirkonnas **R**.*

A

549. Arvutage funktsiooni muut, kui

1) $y=x^2-3$, $x_1=2$, $x_2=3$;
2) $y=2x^2-4x$, $x_1=-2$, $x_2=0$;
3) $y=\frac{1}{x}$, $x_1=2$, $x_2=2,5$;
4) $y=\sin x$, $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=\frac{\pi}{4}$.

550. Leidke funktsiooni muudu üldavaldis, kui

1) $y=x^2$;
2) $y=\frac{3}{x}$;
3) $y=4x-8$;
4) $y=\cos x$;
5) $y=e^x$;
6) $y=\ln x$.

551. Arvutage eelmise ülesande andmetel funktsiooni muut, kui

1) $x=1,\ \Delta x=0{,}5$ ja $x=-1,\ \Delta x=2$;
2) $x=-5,\ \Delta x=2$;
3) $x=-2,\ \Delta x=3$ ja $x=2{,}5,\ \Delta x=-1$;
4) $x=\frac{\pi}{3},\ \Delta x=\frac{\pi}{6}$;
5) $x=0,\ \Delta x=0{,}25$ ja $x=4,\ \Delta x=3$;
6) $x=0{,}8,\ \Delta x=-0{,}2$.

552. Näidake, et lineaarfunktsioonil vastab kogu määramispiirkonna ulatuses samale argumendi muudule sama funktsiooni muut.

553. Liikuva keha kaugus s nn. nullpunktist esitub valemiga $s=2t^2+t+1$, kus t on aeg sekundites. Leidke, milline on selle keha keskmine kiirus alates hetkest 1) $t=0$ järgneva 3 sekundi jooksul, 2) $t=4$ järgneva 1 sekundi jooksul, 3) $t=5$ järgneva 2 sekundi jooksul.

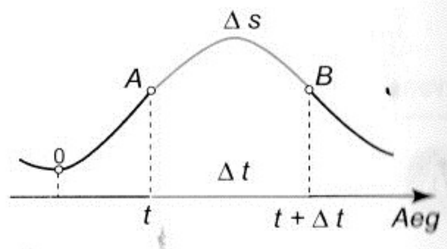
4.7. HETKKIIRUS

Võrdust, mis võimaldab igal hetkel t arvutada mööda mingit joont liikuva keha (punkti) kaugust s nn. nullpunktist O, nimetatakse vaadeldava keha (punkti) **liikumisseaduseks**. Keha vaba langemise korral esitub näiteks liikumisseadus valemina $s=\frac{gt^2}{2}$.

Tähistame üldjuhul liikumisseadust võrdusega $s=f(t)$. Leiame alates hetkest t ajavahemikule Δt vastava läbitud tee pikkuse Δs ja keskmise kiiruse v_k:

$$\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t),$$

$$v_k=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$



Joon. 4.12

Joonisel 4.12 on kujutatud läbitud tee ja selle kõrval ajatelg (aja t kasvades suurus s kasvab). Ajavahemikule Δt vastav läbitud tee on AB. Keskmine kiirus v_k on arvutatud ajavahemiku Δt jooksul või teisiti öeldes teelõigul $\Delta s=AB$. Soovime nüüd teada, kui suur oli liikuva objekti kiirus punktis A, s. o. hetkel t. Seda kiirust nimetatakse hetkkiiruseks (ka hetkeliseks kiiruseks) ning tähistatakse tähega v. Keskmine kiirus v_k iseloomustab hetkkiirust v seda paremini (s. t. nende erinevus on seda väiksem), mida väiksem on Δs või teisiti öeldes, mida väiksem on ajavahemik Δt. Järelikult, kui $\Delta t\to 0$, siis $\Delta s\to 0$ ning $v_k\to v$. Seega

$$v=\lim_{t\to 0}v_k \quad \text{ehk} \quad v=\lim_{t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Vaadeldes liikumisseadust $s=f(t)$ funktsioonina oleme saanud, et liikumiskiirus on *funktsiooni muudu (Δs) ja argumendi muudu (Δt) suhte piirväärtus, kui argumendi muut läheneb nullile.*

Näide.

Veendume, et vaba langemise seadusest $s=\frac{gt^2}{2}$ saame hetkkiiruse valemi, rakendades seost

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Kui $s=\frac{gt^2}{2}$, siis (art. 4.6 näide 4)

$$\Delta s=\frac{g}{2}[2t\Delta t+(\Delta t)^2]$$

ja

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{g}{2}(2t+\Delta t)$$

ning

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g}{2}(2t+\Delta t)=\frac{g}{2}\cdot 2t=gt.$$

Seos $v=gt$ on tõesti füüsikakursusest tuntud vabalangemise kiiruse valem.

A

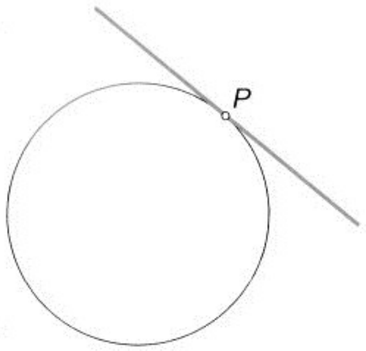
554. Kuidas saab autojuht auto hetkkiirust teada?

555. Keha liigub antud seaduse järgi. Leidke hetkkiiruse valem ja arvutage hetkkiirus, kui

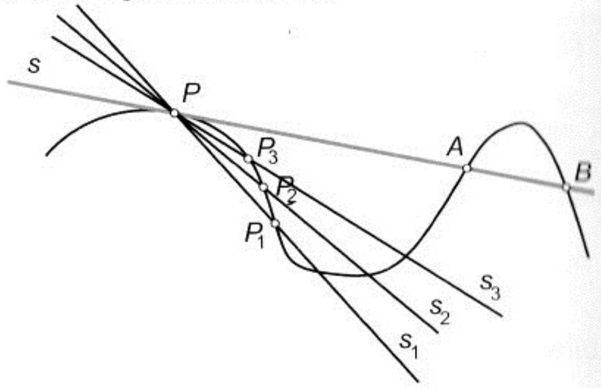
1) $s=2t^2+t+1,\ t_1=2,\ t_2=3{,}5,\ t_3=5$.
2) $s=0{,}4t^2,\ t_1=0,\ t_2=3,\ t_3=8,\ t_4=8{,}5,\ t_5=10$.

4.8. FUNKTSIOONI GRAAFIKU PUUTUJA

Ringjoone puutujaks nimetati sirget, millel on ringjoonega ainult üks ühine punkt (joon. 4.13). Iga joone puutujat nii defineerida ei saa, sest puutujal kui sirgel võib joonega olla rohkem kui üks ühine punkt (joonisel 4.14 on puutujal s peale puutepunkti P veel graafikuga ühised punktid A ja B).



Joon. 4.13



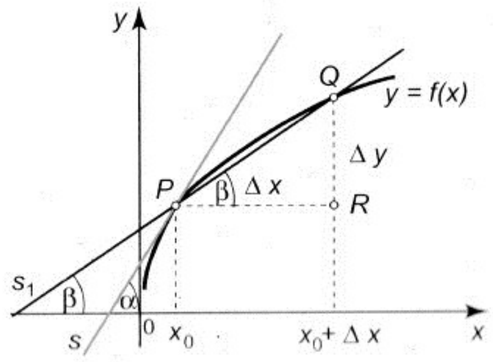
Joon. 4.14

Puutuja defineerimisel vaadeldakse lõikajat (joonisel 4.14 sirge s_1), mille üheks lõikepunktiks joonega on puutepunkt P. Nüüd lastakse lõikaja teist lõikepunkti (P_1) mööda joont läheneda tõkestamatult puutepunktile P (lõikaja s_1 paar vahepealset asendit on sirged s_2 ja s_3). Piirsirge (joonisel sirge s), millele lõikaja hakkab lähenema, on joone puutuja punktis P. Lühemalt:

joone puutujaks punktis P nimetatakse piirsirget s, millele läheneb lõikaja PP_1, kui lõikepunkt P_1 tõkestamatult läheneb mööda joont punktile P.

Seame eesmärgiks leida funktsiooni graafiku (seega ühe joone) puutuja tõus, kui funktsioon on esitatud valemiga $y = f(x)$. Olgu joonisel 4.15 kujutatud selle funktsiooni graafik. Meid huvitab graafiku puutuja s tõus punktis $P(x_0; y_0)$. Anname argumendi väärtusele x_0 muudu Δx, siis argumendi uus väärtus on $x_0 + \Delta x$, millele vastab graafikul punkt Q. Joonestame graafiku lõikaja PQ. Selle tõusunurk olgu β. Kolmnurgast PQR, mis on täisnurkne,

$$\tan\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



Joon. 4.15

Laseme punktil Q mööda graafikut läheneda punktile P. Siis sirge s_1 läheneb sirgele s, s. o. puutujale. Samal ajal $\Delta x \to 0$ ning nurk β läheneb nurgale α, $\beta \to \alpha$. Kuid siis ka $\tan\beta \to \tan\alpha$ ehk $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \tan\alpha$. Et $\tan\alpha$ on puutuja s kui sirge tõus, siis tähistame selle tähega k. Seega: kui $Q \to P$, siis $\Delta x \to 0$ ning $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to k$ ehk

$$k = \tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Sõnastatult: *funktsiooni graafiku puutuja tõus on võrdne funktsiooni muudu ja argumendi muudu suhte piirväärtusega, kui argumendi muut läheneb nullile.*

Näide.

Leiame valemi funktsiooni $y = \dfrac{1}{x}$ puutuja tõusu arvutamiseks (joon 4.5).

Lahendus.
Huvitagu meid puutuja tõus graafiku punktis $(x; y)$. Et

$$\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x+\Delta x)} = \frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)},$$

siis

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\frac{1}{x(x+\Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2}.$$

Valem $k = -\dfrac{1}{x^2}$ võimaldab arvutada funktsiooni $y = \dfrac{1}{x}$ graafiku puutuja tõusu graafiku igas punktis. Kui näiteks $x = 4$, siis vastav tõus $k = -\dfrac{1}{16} = -0{,}0625$. Et $k = \tan\alpha$, saame leida ka puutuja tõusunurga: $\tan\alpha = -0{,}0625 \Rightarrow \alpha = 176°25'$.

A

566. Tuletage valem funktsiooni $y = 3x^2 - 1$ (skitseerige graafik) puutuja tõusu arvutamiseks. Leidke puutuja tõus ja tõusunurk 1) punktis $A(0; -1)$, 2) punktis, mille abstsiss on $\dfrac{1}{3}$, 3) punktis, mille abstsiss on $\dfrac{1}{6}$.

567. Tuletage valem funktsiooni $y = \sqrt{x}$ puutuja tõusu arvutamiseks. Kui suur on puutuja tõus kohal $x = 25$? Leidke puutuja tõusunurk.

4.9. FUNKTSIOONI TULETIS

Liikumise hetkkiiruse ja funktsiooni graafiku puutuja tõusu määramisel jõudsime *funktsiooni muudu ja argumendi muudu suhte piirväärtusele, kui argumendi muut läheneb nullile*, s.t piirväärtusele $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Paljude probleemide matemaatiline lahendamine viib veel samale tulemusele. Seetõttu on otstarbekas anda sellele piirväärtusele erinimetus ja sümbol. Seda suurust nimetatakse **funktsiooni tuletiseks**:

funktsiooni $y = f(x)$ tuletiseks kohal x_0 nimetatakse funktsiooni muudu ja argumendi muudu suhte piirväärtust, kui argumendi muut läheneb nullile.

Tuletist kohal x_0 tähistatakse sümboliga $f'(x_0)$. Seega

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Kui funktsioonil $y=f(x)$ on kohal x_0 tuletis, siis öeldakse, et see funktsioon on **diferentseeruv kohal (punktis) x_0**. Tuletis $f'(x_0)$ on arv.

Funktsiooni $y=f(x)$ tuletist suvalises punktis x tähistatakse sümboliga $f'(x)$, aga ka sümboliga $\left[f(x)\right]'$ või y'.

Kui funktsioon on diferentseeruv arvtelje mingi piirkonna X igas punktis x (teisiti öeldes on diferentseeruv hulgal X), siis on vaadeldavas piirkonnas (hulgal X) korraldatud vastavus argumendi väärtuste x ja tuletise väärtuste $f'(x)$ vahel. Tähendab, piirkonnas (hulgal) X on defineeritud uus funktsioon, mida nimetatakse antud funktsiooni $f(x)$ **tuletisfunktsiooniks** ehk lihtsalt **tuletiseks $f'(x)$**. Nüüd tähendab $f'(x)$ funktsiooni, kusjuures $x\in X$.

Seega on terminil *tuletis* kaks tähendust – teatud arv ja teatud funktsioon. Edaspidi vaatleme tuletist peamiselt funktsioonina. Tuletis antud kohal x_0 (arv) on siis kui tuletisfunktsiooni väärtus argumendi x väärtuse x_0 korral, s. t. $f'(x_0)$.

Varemõpitust järeldub:

1) liikumisseaduse $s = f(t)$ korral on hetkkiirus $v = s' = f'(t)$;
2) funktsiooni $y = f(x)$ graafiku puutuja tõus $k = f'(x)$.

Artikli 4.8 näite põhjal võime öelda, et funktsiooni

$y=\dfrac{1}{x}$ tuletis $y'=-\dfrac{1}{x^2}$.

Funktsiooni tuletise leidmist kui operatsiooni (tehet) nimetatakse **diferentseerimiseks**[1]. Matemaatika haru, mis uurib tuletise ja sellega seotud teiste mõistete omadusi ning rakendamise võimalusi funktsioonide kirjeldamisel, nimetatakse **diferentsiaalarvutuseks**. Diferentsiaalarvutus tekkis 17. sajandi teisel poolel. Selle loojateks olid (teineteisest sõltumatult) saksa matemaatik ja filosoof **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716) ning inglise füüsik, astronoom ja matemaatik **Isaac Newton** (1643–1727). Tööstuse ja tehnika arengule oli diferentsiaalarvutuse loomine ning sellega seonduv järgnev matemaatika areng määrava tähtsusega.

Osutub, et kehtib omadus:

kui funktsioon $y=f(x)$ on diferentseeruv kohal x, siis on see funktsioon ka pidev kohal x.

Artikli 4.6 näites 3 selgus, et suhet $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ võib vaadelda funktsiooni väärtuse muutumise keskmise kiirusena argumendi x suhtes, mis on argumendi ühe ühiku kohta tulev funktsiooni väärtuse muutus. Suurust

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

võib sellisel juhul vaadelda funktsiooni väärtuse muutumise hetkkiirusena argumendi väärtusel x.

Näide.

Leiame funktsiooni $y=2x^2+3x-4$ muutumise hetkkiiruse kohal $x=0$ ja kohal $x=2{,}2$.

Lahendus.

Selleks on tarvis leida antud funktsiooni tuletis. Et $\Delta y=4x\Delta x+3\Delta x+2(\Delta x)^2$ (vt. art. 4.6 näide 2), siis

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4x\Delta x+3\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4x+3+2\Delta x)=4x+3.$$

Funktsiooni $y=2x^2+3x-4$ muutumise hetkkiirus kohal 0 on $f'(0)=4\cdot 0+3=3$, kohal 2,2 aga $f'(2{,}2)=4\cdot 2{,}2+3=11{,}8$. Võrreldes neid muutumise hetkkiirusi keskmiste kiirustega 7 ja 13,6 samadel kohtadel (vt. art. 4.6 näide 3), näeme, et esimesel juhul on erinevus suurem kui teisel juhul. Põhjuseks on esimesel juhul pikem piirkond Δx, mille ulatuses keskmine kiirus arvutati (vastavalt 2 ja 0,9).

[1] *Differentia* (lad. k.) – erinevus, vahe.

Kui funktsioon $y = f(x)$ kirjeldab mingit protsessi, annavad suurused $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ja $f'(x)$ vastavalt protsessi kulgemise keskmise ja hetkkiiruse argumendi x suhtes. Esitagu näiteks funktsioon $y = f(x)$ metallvarda pikkuse y sõltuvust varda temperatuurist x. Siis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ annab varda pikenemise keskmise kiiruse temperatuuri suhtes (temperatuuril x kraadi).

A

558. Tuginedes definitsioonile, leidke tuletis:

1) $y = x^2$; 2) $y = 5x$; 3) $y = x^2 + 5x$;

4) $y = 4x^2$; 5) $y = -x$; 6) $y = 4x^2 - x$;

7) $y = \frac{2}{x}$; 8) $y = \frac{2}{3x+1}$; 9) $y = x$.

559. Leidke $(\sqrt{x})'$, vt. ül. 557.

4.10. FUNKTSIOONIDE SUMMA JA KORRUTISE TULETIS

Funktsiooni tuletise leidmine definitsiooni abil on töömahukas. Seetõttu toimitakse nii, et leitakse enamesinevate funktsioonide tuletised ning diferentseerimise reeglid, mis võimaldavad leida keerulisemate funktsioonide tuletisi nende enamkohatavate funktsioonide tuletiste kaudu. Selle kava realiseerimisele järgnevalt asumegi.

1. Konstantse funktsiooni tuletis.

Kui funktsiooni väärtused on argumendi x iga väärtuse korral võrdsed ühe ja sama arvuga c, siis funktsioon esitub kujul

$y = c$.

Tuletise definitsiooni rakendamiseks leiame funktsiooni muudu:

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$.

Et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

siis

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

ehk

$c' = 0$,
s. t. konstandi tuletis on null.

Näide 1.

Kui $y = 5$, siis $y' = 5' = 0$; kui $y = 364{,}2$, siis $y' = 364{,}2' = 0$; kui $y = -8$, siis $y' = (-8)' = 0$; kui $y = \pi$, siis $y' = \pi' = 0$; kui $y = \sin\frac{\pi}{7}$, siis $y' = \left(\sin\frac{\pi}{7}\right)' = 0$, kui $y = e^2$, siis $y' = (e^2)' = 0$.

2. Argumendi tuletis.

Selleks vaatleme funktsiooni

$y = x$.

Rakendame tuletise definitsiooni:

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Seega

$x' = 1$,
s. t. argumendi tuletis on üks.

3. Funktsioonide summa tuletis.

Leidugu funktsioonidel $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ tuletis kohal x. Leiame summa $f(x) + g(x)$ diferentseerimise reegli.

Vaatleme funktsiooni $y = f(x) + g(x)$ ning rakendame sellele tuletise definitsiooni:

$$\Delta y = [f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)] =$$
$$= [f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)];$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} =$$
$$= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x};$$

$$[f(x)+g(x)]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}.$$

Et esimene liidetav on funktsiooni $y=f(x)$ tuletis $f'(x)$ ja teine liidetav funktsiooni $y=g(x)$ tuletis $g'(x)$, siis

[f(x) + g(x)]′ = f′(x) + g′(x).

Sõnastatult:

kahe funktsiooni summa tuletis võrdub liidetavate funktsioonide tuletiste summaga.

Näide 2.

Leiame 1) funktsiooni $y=x+7$ ja 2) funktsiooni $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ tuletise.

Lahendus.

1) $(x+7)' = x' + 7' = 1+0 = 1.$

2) Et $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$, siis

$$\left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = \left(x+\frac{1}{x}\right)' = x' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 1-\frac{1}{x^2}.$$

Funktsioonide summa diferentseerimise reeglit võib laiendada ka kolmele ja enamale liidetavale. Näiteks

$$[f(x)+g(x)+h(x)]' = \{[f(x)+g(x)]+h(x)\}' =$$
$$= [f(x)+g(x)]' + h'(x) = f'(x)+g'(x)+h'(x).$$

4. Funktsioonide korrutise tuletis.

Olgu funktsioonid $y=f(x)$ ja $y=g(x)$ kohal x diferentseeruvad. Tuletame korrutise $f(x)\cdot g(x)$ diferentseerimise reegli.

Vaatleme funktsiooni $y=f(x)\cdot g(x)$ ning rakendame sellele tuletise definitsiooni. Funktsiooni muut

$\Delta y = f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x).$

Liidame võrduse paremale poolele ja ka lahutame võrduse paremast poolest korrutise $g(x+\Delta x)\cdot f(x)$ ning teisendame avaldist järgmiselt:

$$\Delta y = f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - g(x+\Delta x)\cdot f(x) + g(x+\Delta x)\cdot f(x) - f(x)\cdot g(x) =$$
$$= [f(x+\Delta x)-f(x)]\cdot g(x+\Delta x) + f(x)\cdot[g(x+\Delta x)-g(x)].$$

Suhte $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ kirjutame kujul

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x) + f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}.$$

Nüüd

$$[f(x)\cdot g(x)]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x)\right] +$$
$$+ \lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right] =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x) +$$
$$+ \lim_{\Delta x\to 0} f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} =$$
$$= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Siin $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x) = f(x)$, sest $f(x)$ avaldis muutu Δx ei sisalda, Δx suhtes on $f(x)$ kui konstant.

Kokkuvõtteks:

[f(x) · g(x)]′ = f′(x) · g(x) + f(x) · g′(x).

Sõnastatult:

kahe funktsiooni korrutise tuletis võrdub esimese teguri tuletise ja teise teguri korrutisega, millele on liidetud esimese teguri ja teise teguri tuletise korrutis.

Näide 3.

Leiame $(x^2)'$.

Et $(x^2) = x\cdot x$, siis $(x^2)' = (x\cdot x)' = x'\cdot x + x\cdot x' = 1\cdot x + x\cdot 1 = 2x.$

$(x^2)' = 2x.$

Näide 4.

Leiame $(6x)'$.

Et $6x = 6\cdot x$, siis $(6x)' = 6'\cdot x + 6\cdot x' = 0\cdot x + 6\cdot 1 = 6.$

Leiame $[cf(x)]'$, kus c on konstant.

$[cf(x)]' = c'\cdot f(x) + c\cdot f'(x) = 0\cdot f(x) + c\cdot f'(x) = cf'(x).$

Tähendab,

$[cf(x)]' = c \cdot f'(x)$,
konstantse teguri võib tuua tuletise märgi alt tegurina välja.

Näide 5.

Leiame $(5x^2)'$. $(5x^2)' = 5 \cdot (x^2)' = 5 \cdot (2x) = 10x$.

Näide 6.

Leiame $\left(\frac{4}{x}\right)'$. Et $\frac{4}{x} = 4 \cdot \frac{1}{x}$, siis $\left(\frac{4}{x}\right)' = \left(4 \cdot \frac{1}{x}\right)' = 4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = 4 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{4}{x^2}$.

5. Funktsioonide vahe tuletis.

Olgu funktsioonid $y = f(x)$ ja $g(x)$ diferentseeruvad kohal x. Leiame vahe $f(x) - g(x)$ diferentseerimise reegli.

Rakendame funktsioonide summa ja funktsiooni ning arvu korrutise diferentseerimise reeglit:

$$[f(x) - g(x)]' = [f(x) + (-1) \cdot g(x)]' = f'(x) + [(-1) \cdot g(x)]' =$$
$$= f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x).$$

Seega:

$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$,
funktsioonide vahe tuletis võrdub vastavate funktsioonide tuletiste vahega.

Näide 7.

Leiame $(x^2 - x)'$. $(x^2 - x)' = (x^2)' - x' = 2x - 1$.

Ülesannete 557 ja 559 lahendamisel võisime veenduda, et

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Näide 8.

Leiame funktsiooni $y = x^{1,5}$ tuletise.

Lahendus. Et $x^{1,5} = x \cdot x^{0,5} = x\sqrt{x}$, siis

$$(x\sqrt{x})' = x'\sqrt{x} + x(\sqrt{x})' = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}} = 1{,}5\sqrt{x}.$$

A

560. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y = 25$; 2) $y = -0{,}009$; 3) $y = 10$;
4) $y = -\pi$; 5) $y = e^{-3}$; 6) $y = \pi \cdot e$;
7) $y = \sin\frac{\pi}{6}$; 8) $y = \tan 7{,}7$; 9) $y = \log(10)$.

561. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y = x + 44$; 2) $y = x + e$; 3) $y = x - 10$;
4) $y = \frac{x+1}{x}$; 5) $y = \frac{1}{x} + 5$; 6) $y = \frac{1-8x}{x}$.

562. Leidke korrutise tuletise reegli põhjal funktsiooni $y = x^3$ tuletis. Kirjutage veel kord välja x', $(x^2)'$ ja $(x^3)'$. Milline võiks olla nende tuletiste eeskujul $(x^n)'$, kui $n \in \mathbf{N}$? Kontrollige oletust $n = 4$ korral, kasutades jälle korrutise tuletise reeglit.

563. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y = 7x$; 2) $y = -3x$; 3) $y = \frac{7}{x}$;
4) $y = 3x + 6$; 5) $y = 2x + 10$; 6) $y = -4x + 8$;
7) $y = 2(x + 3)$; 8) $y = 6(2x + 1)$; 9) $y = 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

564. Leidke lineaarfunktsiooni $y = ax + b$ tuletis.

565. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y = x^2 + x + 5$; 2) $y = \frac{1}{x} + 2x + 3$; 3) $y = \frac{x^2 + 3x + 4}{x}$.

566. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y = 4 - x^2$; 2) $y = 8 - x$; 3) $y = 10x^2 - 9$;
4) $y = 3x^2 - 2x + 6$; 5) $y = 4x^2 - 6x$; 6) $y = 8x - 7x^2$;
7) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$; 8) $y = \frac{11x^2 - x}{x}$; 9) $y = \frac{2x - 4}{x}$.

567. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y = (x + 3)^2$; 2) $y = (4 - 2x)^2$; 3) $y = (x - 1)^2$;
4) $y = x^2\sqrt{x}$; 5) $y = 2\sqrt{x} - 3x^2$; 6) $y = (\sqrt{x} + 1)^2$.

568. Leidke $f'(3)$; $f'(-2)$; $f'(0)$; $f'(0,25)$; $f'(-0,7)$, kui

1) $y=4x^2-8x+1$; 2) $y=\dfrac{8x^3+4}{x}$.

569. Leidke liikuva keha kiiruse valem, kui liikumisseadus on

1) $s=t^2+2t+1$; 2) $s=80t+4$.

570. Leidke funktsiooni $y=3x^2-6x+1$ graafiku puutuja tõus ja tõusunurk punktides, kus

1) $x=3$; 2) $x=1$; 3) $x=0$; 4) $x=-1,5$.

4.11. FUNKTSIOONIDE JAGATISE TULETIS

Olgu funktsioonid $y=f(x)$ ja $y=g(x)$ kohal x diferentseeruvad, kusjuures $g(x)\neq 0$. Tuletame jagatise $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ diferentseerimise reegli.

Moodustame funktsiooni $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ning rakendame sellele tuletise definitsiooni. Funktsiooni muut

$$\Delta y=\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g(x)\cdot f(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}.$$

Lisame viimase murru lugejasse suurused $\pm g(x)\cdot f(x)$ ning kirjutame suhte $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ kujul

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{g(x)\cdot f(x+\Delta x)-g(x)\cdot f(x)-[f(x)\cdot g(x+\Delta x)-g(x)\cdot f(x)]}{\Delta x\cdot g(x)\cdot g(x+\Delta x)}=$$

$$=\frac{g(x)\cdot\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f(x)\cdot\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}.$$

Et $\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x)=g(x)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)=f(x)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$ ja $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=g'(x)$, siis $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ annab:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Näide 1.

Leiame funktsiooni $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ tuletise.

Lahendus.

Et $(x^2)'=2x$, siis jagatise tuletise reegli põhjal

$$y'=\left(\frac{x^2}{x+1}\right)'=\frac{(x^2)'\cdot(x+1)-x^2(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{2x(x+1)-x^2\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}.$$

Näide 2.

Leiame $(x^{-2})'$. Et $x^{-2}=\dfrac{1}{x^2}$, siis $(x^{-2})'=\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'=$

$$=\frac{1'\cdot x^2-1\cdot(x^2)'}{(x^2)^2}=\frac{-2x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}=-2x^{-3}.$$

Enne tuletise leidmist tasub vaadata, kas funktsiooni avaldist saab tuletise leidmise huvides lihtsustada.

Näide 3.

Leiame funktsiooni tuletise, kui $y=\dfrac{(x-\sqrt{x})^2}{x}$.

Lahendus. Et $\dfrac{(x-\sqrt{x})^2}{x}=\dfrac{x^2-2x\sqrt{x}+x}{x}=x-2\sqrt{x}+1$,

siis $\left[\dfrac{(x-\sqrt{x})^2}{x}\right]'=(x-2\sqrt{x}+1)'=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=\dfrac{x-\sqrt{x}}{x}$.

A

671. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y=\dfrac{2x+3}{x^2}$; 2) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$; 3) $y=\dfrac{4}{x^2}$;

4) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; 5) $y=\dfrac{8x}{1-3x^2}$; 6) $y=5x^{-2}$;

7) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$; 8) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$; 9) $y=\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}}$;

10) $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$; 11) $y=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$; 12) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$.

572. Leidke funktsiooni $y=\dfrac{5x}{2-3x}$ tuletis kohal 1) 0, 2) $\dfrac{2}{3}$, 3) 2, 4) -1.

573. Leidke eelmise ülesande andmetel graafiku puutuja tõus ja tõusunurk nimetatud kohtadel.

4.12. ASTMEFUNKTSIOONI TULETIS

Vaatleme esmalt funktsiooni $y=x^n$, $n\in\mathbf{N_1}$. Ülesande 562 lahendamisel peaks tekkima oletus, et $(x^n)'=nx^{n-1}$, sest $(x^1)'=1=1\cdot x^0$, $(x^2)'=2x^1$, $(x^3)'=3x^2$.

Näitame järgnevalt, et tõesti on

$$(x^n)'=nx^{n-1}. \qquad (1)$$

*Kasutame selleks matemaatilise induktsiooni meetodit.

Kontrollime, kas tõestatav väide (1) on õige $n=1$ korral. Varasemast teame, et $(x^1)'=x'=1$. Et võrduse (1) parem pool annab sama, $1\cdot x^{1-1}=1\cdot x^0=1$, siis võrdus (1) kehtib $n=1$ korral.

Eeldame nüüd, et võrdus (1) kehtib naturaalarvu k korral, s. t.

$$(x^k)'=kx^{k-1}, \qquad (2)$$

ja näitame, et võrdus (1) kehtib ka ühe võrra suurema naturaalarvu $k+1$ korral, s. t. näitame, et

$$(x^{k+1})'=(k+1)x^k.$$

Lähtume viimase võrduse vasakust poolest, kasutades eeldust (2):

$$(x^{k+1})'=(x\cdot x^k)'=x'\cdot x^k+x\cdot(x^k)'=x^k+x(kx^{k-1})=$$
$$=x^k+k\cdot x^k=(k+1)x^k.$$

Et meil õnnestus näidata võrduse $(x^{k+1})'=(k+1)x^k$ kehtivust, siis on matemaatilise induktsiooni meetodi kohaselt

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

iga $n\in\mathbf{N_1}$ korral.*

Näide 1.

Äsja tõestatu põhjal on $(x^6)'=6x^5$; $(x^{123})'=123x^{122}$; $(x^{1000})'=1000x^{999}$.

Näide 2.

Leiame funktsiooni $y=8x^7-3x^6-2x^2+2$ tuletise.

Lahendus.

$$y'=(8x^7-3x^6-2x^2+2)'=(8x^7)'-(3x^6)'-(2x^2)'+2'=$$
$$=8(x^7)'-3(x^6)'-2(x^2)'+0=56x^6-18x^5-4x.$$

Leiame järgnevalt funktsiooni $y=x^n$, kus $n\in\mathbf{Z}^-$, tuletise. Et $n<0$, siis kirjutame selle kujul $n=-k$, kus $k\in\mathbf{N_1}$. Vaadeldud funktsiooni avaldis x^n esitub nüüd kujul x^{-k}, kus $k\in\mathbf{N_1}$, ning

$$(x^n)'=(x^{-k})'=\left(\frac{1}{x^k}\right)'=\frac{1'\cdot x^k-1\cdot(x^k)'}{(x^k)^2}=-\frac{kx^{k-1}}{x^{2k}}=-kx^{-k-1}=nx^{n-1}.$$

Tulemus on sama, mis $n\in\mathbf{N}$ korral.

Näide 3.

Leiame funktsiooni $y=4x^{-8}$ tuletise:

$$y'=(4x^{-8})'=4(x^{-8})'=4\cdot(-8x^{-9})=-32x^{-9}.$$

Kokku võttes oleme näidanud, et funktsiooni $y=x^n$, $n\in\mathbf{Z}$ tuletis on nx^{n-1}, sest see kehtib ka x^0 korral: $(x^0)'=0\cdot x^{-1}=0$, nagu peabki olema, kuna $(x^0)'=1'=0$.

On võimalik tõestada, et

$(x^a)'=ax^{a-1}$, kui $a\in R$.

Näide 4.

Viimase seose põhjal

1) $(\sqrt[3]{x})'=(x^{\frac{1}{3}})'=\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{3x}$,

2) $(x^{4,08})'=4,08\cdot x^{4,08-1}=4,08\cdot x^{3,08}$.

Näide 5.

Leiame funktsiooni $y=\dfrac{x^7\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt{x}}$ tuletise.

Lahendus. Esitame funktsiooni avaldise kujul x^a:

$$\frac{x^7\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt{x}}=x^7\cdot x^{\frac{3}{5}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=x^7\cdot x^{\frac{1}{10}}=x^{7,1}.$$

Seega $y=x^{7,1}$ ning $(x^{7,1})'=7,1x^{6,1}$.

A

574. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y=x^8$; 2) $y=x^{10}$; 3) $y=2x^7$;
4) $y=x^5$; 5) $y=x^{101}$; 6) $y=-4x^3$.

575. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y=12x^5+10x^4-3x^2+x$; 2) $y=3x^5+5x^3-x^2+4$;
3) $y=-x^{11}+6x^5+2x-1$; 4) $y=3x^{22}-6x$;
5) $y=3x^9+2x^8+x^7-4x^6-9x^5+2x^4+x^3-13x^2+x+9$.

576. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y=x^{-3}$; 2) $y=x^{-4}$; 3) $y=x^{-5}$;
4) $y=x^{\frac{2}{7}}$; 5) $y=x^{\frac{5}{2}}$; 6) $y=x^{\frac{9}{10}}$;
7) $y=x^{4,5}$; 8) $y=x^{23,8}$; 9) $y=x^{-17,5}$;
10) $y=\sqrt[4]{x}$; 11) $y=\sqrt[6]{x^5}$; 12) $y=\sqrt[13]{x^8}$.

577. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y=x\sqrt{x}$; 2) $y=x^2\sqrt[3]{x}$; 3) $y=x^{-3}\sqrt[5]{x^2}$;
4) $y=\frac{\sqrt{x}}{x}$; 5) $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x}}$; 6) $y=\frac{\sqrt[5]{x}}{x^3}$.

578. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+4\sqrt[4]{x}$; 2) $y=(\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+x)$;
3) $y=(\sqrt{x}+2x)^2$; 4) $y=(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+5)$.

579. Leidke tuletis, kui

1) $y=\frac{2x-1}{x-2}$; 2) $y=\frac{5x-2}{x}$; 3) $y=\frac{x^2}{x+7}$;
4) $y=(x+5)(x-2)$; 5) $y=x^4(x^2-x^{-3})$; 6) $y=x^{0,3}\cdot x^{1,7}$;
7) $y=\frac{x^5+1}{x-x^4}$; 8) $y=\frac{x^3}{x^2+2x}$; 9) $y=\frac{x^3-8}{x^2+2x+4}$.

580. Leidke $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'(1)$ ja $f'(5)$, kui

1) $y=0,25x^4-3x^3+6x^2-4x+12$;
2) $y=2\sqrt{x}-3\sqrt[6]{x^5}+4x^{-2}$.

581. Skitseerige funktsiooni $y=\sqrt{x}$ graafik. Leidke puutuja tõus ja tõusunurk kohal $x=0,000001$, $x=1$ ja $x=205$. Kujutage ette, kuidas kulgevad vastavad puutujad.

4.13. * LIITFUNKTSIOONI TULETIS

Tuletame meelde, mis on liitfunktsioon.

Näide 1.

Kui $y=\sqrt{u}$ ja muutuja u avaldub omakorda muutuja x kaudu, näiteks $u=\sin x$, siis öeldakse, et muutuja y on muutuja x liitfunktsioon. Nii kahe valemiga antud liitfunktsiooni saab esitada peale vastavat asendust ka ühe valemiga: $y=\sqrt{\sin x}$.

Üldjuhul: kui $y=f(u)$ ja $u=g(x)$, siis $y=f(g(x))$. Muutujat u nimetatakse teatavasti vahepealseks muutujaks, kuid funktsioone $y=f(u)$ ja $u=g(x)$ nimetatakse vastavalt välimiseks ning sisemiseks funktsiooniks. Eelmises näites on välimiseks funktsiooniks $y=\sqrt{u}$ ning sisemiseks funktsiooniks $u=\sin x$. Funktsiooni kujul $y=f(g(x))$ saab esitada vahepealse muutuja kaudu.

Näide 2.

Esitame funktsiooni

1) $y=(3x^2-4)^2$, 2) $y=\sin 5x$, 3) $y=2^{\tan x}$

vahepealse muutuja kaudu:

1) $y=u^2$, $u=3x^2-4$; 2) $y=\sin v$, $v=5x$; 3) $y=2^t$, $t=\tan x$.

Seame eesmärgiks leida liitfunktsiooni $y=f(g(x))$ tuletise. Olgu funktsioonid $y=f(u)$ ja $u=g(x)$ diferentseeruvad, s. t.

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u) \text{ ja } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=g'(x).$$

Siis $\frac{\Delta y}{\Delta u}-f'(u)$ ja $\frac{\Delta u}{\Delta x}-g'(x)$ on hääbuvad suurused vastavalt Δu ja Δx lähenemisel nullile. Tähistame need hääbuvad suurused tähtedega α ja β

$\frac{\Delta y}{\Delta u}-f'(u)=\alpha$ ja $\frac{\Delta u}{\Delta x}-g'(x)=\beta$. Viimastest võrdustest $\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u$ ja $\Delta u=g'(x)\Delta x+\beta\Delta x$ ning pärast Δu avaldise asendamist Δy avaldis esimesse liidetavasse

$$\Delta y = f'(u)g'(x)\Delta x + f'(u)\beta\Delta x + \alpha\Delta u.$$

Jagades saadud võrduse mõlemad pooled suurusega Δx, jõuame seoseni

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)g'(x) + f'(u)\beta + \alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Et $\Delta x \to 0$ korral ka $\Delta u \to 0$ ning α ja β on hääbuvad suurused vastavalt Δu ja Δx lähenemisel nullile, siis $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha = \lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha = 0$ ja $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta = 0$. Arvestades veel, et $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = g'(x)$, saame, et liitfunktsiooni $y = f(g(x))$ tuletis

$$y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(f'(u)g'(x) + f'(u)\beta + \alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = f'(u)g'(x), \text{ kus } u = g(x).$$

Tähendab:

kui $y = f(g(x))$ ehk $y = f(u)$ ja $u = g(x)$, siis $y'(x) = f'(u)\cdot g'(x)$, kus $u = g(x)$; teisiti, $y' = f'[g(x)]\cdot g'(x)$.

Sõnastatult:

liitfunktsiooni tuletis on võrdne välimise funktsiooni tuletisega sisemise funktsiooni kohal, mis on korrutatud sisemise funktsiooni tuletisega.

Näide 3.

Leiame funktsiooni 1) $y = \sqrt{u}$, $u = x^2 + 1$; 2) $y = (3x^2 - 4)^2$ tuletise.

Lahendus.

Rakendame liitfunktsiooni diferentseerimise reeglit:

1) $y'(x) = (\sqrt{u})'\cdot(x^2+1)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(2x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

2) kui $y = u^2$ ja $u = 3x^2 - 4$, siis $y'(x) = (u^2)'\cdot(3x^2-4)' = 2u\cdot 6x =$
$= 12x(3x^2-4) = 36x^3 - 48x$.

Viimasel juhul oleks ka võinud avada funktsiooni avaldises sulud ning diferentseerida siis summat liikmeti.

Liitfunktsiooni korral võib vahepealseid muutujaid olla ka rohkem kui üks.

Näide 4.

Kirjutame funktsiooni $y = \frac{1}{\sqrt{5x^4 - 4x^2}}$ vahepealsete muutujate kaudu:

$y = \frac{1}{u}$, $u = \sqrt{v}$, $v = 5x^4 - 4x^2$.

Näide 5.

Leiame eelmises näites esitatud funktsiooni tuletise.

Lahendus.

Et liitfunktsiooni diferentseerimise reeglit kahe vahepealse muutuja korral ei tea, teeme järgmiselt.

Kirjutame funktsiooni $y = \frac{1}{\sqrt{5x^4 - 4x^2}}$ kujul $y = \frac{1}{u}$, $u = \sqrt{5x^4 - 4x^2}$. Nüüd

$$y'(x) = \left(\frac{1}{u}\right)'\cdot(\sqrt{5x^4-4x^2})' = -\frac{1}{u^2}\cdot(\sqrt{5x^4-4x^2})' = -\frac{1}{5x^4-4x^2}\cdot(\sqrt{5x^4-4x^2})'.$$

Leidmata on tuletis uuest liitfunktsioonist $y = \sqrt{5x^4 - 4x^2}$

ehk funktsioonist $y = \sqrt{v}$, $v = 5x^4 - 4x^2$.

Nüüd $(\sqrt{5x^4-4x^2})' = (\sqrt{v})'\cdot(5x^4-4x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot(20x^3 - 8x) = \frac{10x^3 - 4x}{\sqrt{5x^4-4x^2}}$

ning $y'(x) = -\frac{10x^3-4x}{(5x^4-4x^2)\sqrt{5x^4-4x^2}} = \frac{4-10x^2}{(5x^3-4x)\sqrt{5x^4-4x^2}}$.

582. Kirjutage antud liitfunktsioon ühe valemiga:

1) $y = \sqrt{u}$, $u = \sin x$;
2) $y = \sqrt{u}$, $u = 5x + 8$;
3) $y = \ln v$, $v = x^2 + 1$;
4) $y = e^v$, $v = -3x$;
5) $y = \sin t$, $t = \sqrt{x}$;
6) $y = 10^t$, $t = \log x$.

583. Kirjutage antud funktsioon vahepealse muutuja abil:

1) $y = \sqrt{13x+1}$;
2) $y = (2x^3 - 4)^5$;
3) $y = 10^{5x}$;
4) $y = \sqrt{\tan x}$;
5) $y = \cos^7 x$;
6) $y = e^{\sqrt{x}}$;
7) $y = (\sin^2 x + 8)^2$;
8) $y = \ln\frac{x+1}{3x}$;
9) $y = \sqrt[5]{e^x}$.

584. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y = \sqrt{u}$, $u = 5x + 8$;
2) $y = \sqrt{t}$, $t = 2x^3 - 4$;
3) $y = \sqrt{v}$, $v = \frac{x+1}{x-1}$;
4) $y = \sqrt[8]{w}$, $w = \frac{3}{x}$;
5) $y = t^4$, $t = 0{,}5x^6 - x^3$;
6) $y = 8u^3$, $u = 6 - 2x^2$.

585. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y = \sqrt{13x+1}$;
2) $y = (6x^3 - x^2 - 2)^5$;
3) $y = (x-1)^9$;
4) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$;
5) $y = \sqrt{x^2 - 5}$;
6) $y = (\sqrt{x} + x)^7$.

586. Leidke ülesandes 583 antud funktsioonide tuletised.

587. Kirjutage liitfunktsioon ilma vahepealsete muutujateta.

1) $y=\sqrt{u},\quad u=\sin v,\quad v=5x;$
2) $y=u^3,\quad u=\ln t,\quad t=8x;$
3) $y=\cos t,\quad t=e^u,\quad u=\ln x;$
4) $y=v^4,\quad v=\tan u,\quad u=x^4.$

4.14. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE TULETISED

1. Siinusfunktsiooni tuletis.

Et $y=\sin x$, siis

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}=$$
$$=2\cos(x+0{,}5\Delta x)\sin 0{,}5\Delta x.$$

Teades, et $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos(x+0{,}5\Delta x)\cdot\sin 0{,}5\Delta x}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+0{,}5\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin 0{,}5\Delta x}{0{,}5\Delta x}=$$
$$=\cos x\cdot 1=\cos x.$$

Seega

(sin *x*)′ = cos *x*.

Näide 1.

Leiame 1) $y=\frac{1-\sin x}{\sin x}$, 2) $y=\sin(4x^3-x)$ tuletise.

Lahendus. Leiame tuletise järgmiselt:

1) $y'=\frac{(1-\sin x)'\sin x-(1-\sin x)(\sin x)'}{\sin^2 x}=$
$$=\frac{-\cos x\sin x-(1-\sin x)\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x};$$

2) olgu $y=\sin t$ ja $t=4x^3-x$, siis
$$y'=(\sin t)'\cdot(4x^3-x)'=\cos t\cdot(12x^2-1)=$$
$$=(12x^2-1)\cos(4x^3-x).$$

2. Koosinusfunktsiooni tuletis.

Leiame funktsiooni $y=\cos x$ tuletise analoogiliselt siinusfunktsiooni tuletisega

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}=$$
$$=-2\sin(x+0{,}5\Delta x)\sin 0{,}5\Delta x.$$
$$(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin(x+0{,}5\Delta x)\sin 0{,}5\Delta x}{\Delta x}=$$
$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+0{,}5\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin 0{,}5\Delta x}{0{,}5\Delta x}=-\sin x\cdot 1=-\sin x.$$

Tähendab

(cos *x*)′ = – sin *x*.

Näide 2.

Leiame $y=\sin x\cdot\cos x$ tuletise.

Lahendus. Korrutise tuletise reegli kohaselt

$$(\sin x\cdot\cos x)'=\ =(\sin x)'\cdot\cos x+(\sin x)\cdot(\cos x)'=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x.$$

3. Tangensfunktsiooni tuletis.

Funktsiooni $y=\tan x$ tuletise leiame jagatise $\frac{\sin x}{\cos x}$ tuletisena ning saame, et

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Näide 3.

Leiame $y=x-\tan x$ tuletise:

$$(x-\tan x)'=1-\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x}=-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=-\tan^2 x.$$

Näide 4.

Leiame $y=\cos^{-1}x-\tan^2 x$ tuletise.

Lahendus. Tuletis tuleb võtta kummastki liidetavast, mida vaatleme liitfunktsioonidena. Esimese liidetava korral $y=u^{-1}$ ja $u=\cos x$, teise korral $y=t^2$ ja $t=\tan x$. Nüüd

$$(\cos^{-1}x-\tan^2 x)'=(u^{-1})'\cdot(\cos x)'-(t^2)'\cdot(\tan x)'=$$
$$=-1\cdot u^{-2}(-\sin x)-2t\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\frac{2\tan x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x-2\tan x}{\cos^2 x}.$$

A

588. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y = 6\sin x$; 2) $y = -5\sin x$; 3) $y = 4{,}3\sin x$;

4) $y = \dfrac{1}{\sin x}$; 5) $y = \dfrac{\sin x}{1+\sin x}$; 6) $y = x^3 \sin x$;

7) $y = \dfrac{\sin 2x}{\cos x}$; 8) $y = \sin^2 x$; 9) $y = 6x^4 + \sin x$;

10) $y = 0{,}4\cos x$; 11) $y = -3\cos x$; 12) $y = x\cos x$;

13) $y = \dfrac{1}{\cos x}$; 14) $y = \cos^2 x$; 15) $y = \sqrt{\cos x}$;

16) $y = \cos(-x)$; 17) $y = \cos 4x$; 18) $y = \cos\sqrt{x}$.

589. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$; 2) $y = \cos 2x$;

3) $y = \dfrac{\cos x + \sin x}{\sin x}$; 4) $y = (2+\cos x)^2$;

5) $y = (\sin x + \cos x)^2$; 6) $y = 5\sin x + 3\cos x$.

590. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y = 5\tan x$; 2) $y = -9\tan x$; 3) $y = x\tan x$;

4) $y = \dfrac{\tan x}{1+\tan x}$; 5) $y = \dfrac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$; 6) $y = \dfrac{1}{\tan x}$;

7) $y = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$; 8) $y = \tan\dfrac{x}{2}$; 9) $y = \tan 8x$.

591. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y = \sin x \tan x$; 2) $y = \tan x(\cos x - 1)$;

3) $y = \tan 2x$; 4) $y = \cos x(\sin x + \tan x)$.

592. Leidke

1) $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, kui $y = 5\sin x$; 2) $f'(0)$, kui $y = \dfrac{1}{\cos x}$;

3) $f'\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$, kui $y = \sin 2x$; 4) $f'\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$, kui $y = \tan x$.

593. Leidke funktsioonide $y = \sin x$, $y = \cos x$ ja $y = \tan x$ graafikute puutuja tõusunurk kohal 0.

594. Leidke $y = \cot x$ tuletis.

4.15. LOGARITMFUNKTSIOONI TULETIS

Leiame logaritmfunktsiooni $y = \log_a x$, $a \neq 1$, $a > 1$ tuletise, rakendades tuletise definitsiooni. Leiame esmalt funktsiooni muudu ning siis suhte $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x+\Delta x}{x} = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Asendame suhte $\dfrac{x}{\Delta x}$ uue muutujaga u. Siis $u = \dfrac{x}{\Delta x}$, millest $\Delta x = \dfrac{x}{u}$ ning

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u}{x}\log_a\left(1+\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{1}{u}\right)^u.$$

Kui $\Delta x \to 0$, siis võrdusest $u = \dfrac{x}{\Delta x}$ järeldub, et $u \to \infty$. Tähendab,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right] = \frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{u}\right)^u.$$

Kui $u \to \infty$, siis $\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^u \to \mathrm{e}$ ning $\log_a\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^u \to \log_a \mathrm{e}$.

Tähendab,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}.$$

Et $\log_a \mathrm{e} = \dfrac{1}{\ln a}$, siis

$$\boldsymbol{(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a \mathrm{e} = \frac{1}{x\ln a}.}$$

Näide 1.

$$(\log_7 x)' = \frac{1}{x}\log_7 \mathrm{e} = \frac{1}{x\ln 7}.$$

Kui logaritmi alus $a = \mathrm{e}$, siis

$$\boldsymbol{(\ln x)' = \frac{1}{x}.}$$

Näide 2.

Leiame 1) $y=\ln^2 x$ ja 2) $y=\log\frac{4}{x}$ tuletise.

Lahendus.

1) $(\ln^2 x)'=(\ln x\cdot\ln x)'=\frac{1}{x}\cdot\ln x+\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{2}{x}\ln x$. Tuletise $(\ln^2 x)'$ oleks võinud leida ka liitfunktsiooni diferentseerimise reegli järgi. Kui $y=t^2$ ja $t=\ln x$, siis $y'=(t^2)'\cdot(\ln x)'=2t\cdot\frac{1}{x}=\frac{2}{x}\ln x$.

2) Vaatleme liitfunktsiooni $y=\log u$, $u=\frac{4}{x}$. Nüüd $\left(\log\frac{4}{x}\right)'=(\log u)'\cdot\left(\frac{4}{x}\right)'=$

$=\frac{1}{u}\log e\cdot\left(-\frac{4}{x^2}\right)=-\frac{x}{4}\cdot\frac{4}{x^2}\cdot\log e=-\frac{1}{x}\log e=-\frac{1}{x\ln 10}$.

Kui antud funktsioon kirjutada kujul $y=\log 4-\log x$, ei ole liitfunktsiooniga tegemist.

A

595. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y=\log_2 x$; 2) $y=\log_{0,208} x$; 3) $y=3\log x$;
4) $y=-3\ln x$; 5) $y=\log_{10} x$; 6) $y=5\ln x$;
7) $y=\ln^8 x$; 8) $y=\ln x^8$; 9) $y=\ln 8x$;
10) $y=\ln\sqrt{x}$; 11) $y=\log\frac{1}{x}$; 12) $y=\log(2x-3)$.

596. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y=\frac{\log x}{\ln x}$; 2) $y=\frac{\ln x}{x}$; 3) $y=\frac{1+\log_2 x}{1-\log_{0,5} x}$;
4) $y=x\ln x$; 5) $y=x^2-2\ln x$; 6) $y=\frac{5}{x}+\log_5\frac{5}{x}$;
7) $y=\ln\cos x$; 8) $y=\ln\tan x$; 9) $y=\log(4x^2-2x)$.

597. Arvutage $f'(1)$, $f'(2)$, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f'(e)$, kui

1) $y=\frac{\log x}{\ln x}$; 2) $y=\frac{\ln x}{x^2}$; 3) $y=x^2-2\ln x$;
4) $y=\ln\cos x$; 5) $y=\ln\tan x$; 6) $y=\log(4x^2-2x)$.

598. Leidke funktsiooni $y=\ln x$ ja $y=\log x$ graafiku puutuja tõus ja tõusunurk kohal $x=1$.

4.16. * PÖÖRDFUNKTSIOONI TULETIS

Tuletame meelde, et funktsioonil $y=f(x)$ leidub pöördfunktsioon ainult siis, kui funktsioon on oma määramispiirkonnas kas kasvav või kahanev. Järelikult kehtib siis seos: kui $\Delta x\neq 0$, siis ka $\Delta y\neq 0$.

Pöördfunktsiooni saamiseks, näiteks funktsiooni $y=\frac{2}{x+1}$ korral, tuleb avaldada muutuja x muutuja y kaudu ning lugeda muutuja y argumendiks ja muutuja x funktsiooniks (lõpuks on otstarbekas viimased tähistused ümber muuta):

$y=\frac{2}{x+1}\Rightarrow x+1=\frac{2}{y}\Rightarrow x=\frac{2}{y}-1$ ehk $y=\frac{2}{x}-1$.

Funktsioon $x=\frac{2}{y}-1$ ehk $y=\frac{2}{x}-1$ on funktsiooni $y=\frac{2}{x+1}$ pöördfunktsioon (ja ka vastupidi).

Olgu funktsioonil $y=f(x)$ pöördfunktsioon $x=f^{-1}(y)$, kus y on argument ning x on funktsioon. Eeldame seejuures, et funktsioon $y=f(x)$ on diferentseeruv, tähendab, ka pidev. Osutub, et pideva funktsiooni pöördfunktsioon on ka pidev. Seega on $x=f^{-1}(y)$ pidev, s.t. kui $\Delta y\to 0$, siis ka $\Delta x\to 0$.

Vastavalt tuletise definitsioonile on pöördfunktsiooni $x=f^{-1}(y)$ tuletis

$$[f^{-1}(y)]'=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}.$$

Niisiis,

kui funktsioonil $y=f(x)$ on pöördfunktsioon $x=f^{-1}(y)$, siis

$[f^{-1}(y)]'=\frac{1}{f'(x)}$ ja $f'(x)=\frac{1}{[f^{-1}(y)]'}$, kui $y=f(x)$.

Näide.

Leiame funktsiooni $y=\frac{2}{x+1}$ tuletise pöördfunktsiooni $x=\frac{2}{y}-1$ tuletise kaudu.

Lahendus. Et $f'(x)=\frac{1}{[f^{-1}(y)]'}$, kui $y=f(x)$, siis

$$\left(\frac{2}{x+1}\right)' = \frac{1}{\left(\frac{2}{y}-1\right)'} = \frac{1}{-\frac{2}{y^2}-0} = -\frac{y^2}{2}.$$

Kuna $y = \frac{2}{x+1}$, siis $\left(\frac{2}{x+1}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{x+1}\right)^2 = -\frac{2}{(x+1)^2}$.

Sama tulemuse oleksime saanud ka antud funktsiooni otsese diferentseerimise teel:

$$\left(\frac{2}{x+1}\right)' = \frac{2'(x+1)-2(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{-2}{(x+1)^2}.$$

599. Leidke antud funktsiooni pöördfunktsioon ja selle järgi antud funktsiooni tuletis:

1) $y = \sqrt[5]{x}$; 2) $y = 5x+10$; 3) $y = -0{,}4x+2$.

600. Leidke funktsiooni $y = e^x$ tuletis selle pöördfunktsiooni tuletise kaudu.

601. Leidke funktsiooni $y = \sqrt[n]{x}$ tuletis selle pöördfunktsiooni tuletise kaudu.

4.17. EKSPONENTFUNKTSIOONI TULETIS

Logaritmfunktsiooni defineerisime kui eksponentfunktsiooni $y = a^x$ pöördfunktsiooni. Järelikult on $y = a^x$ pöördfunktsiooniks $x = \log_a y$ ning

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{y}{\log_a e} = \frac{a^x}{\log_a e} = a^x \ln a.$$

Lühemalt:

$(a^x)' = a^x \ln a$.

Kui $a = e$, siis

$(e^x)' = e^x$.

Näide 1.

Leiame 1) $y = 2^x$ ja 2) $y = e^{-x}$ tuletise.

Lahendus.

1) $(2^x)' = 2^x \ln 2$. 2) $(e^{-x})' = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = \frac{1'\cdot e^x - 1\cdot (e^x)'}{(e^x)} = -\frac{1}{e^x} = -e^{-x}$.

Näide 2.

Leiame $y = 8^{2-3x+3x^2}$ tuletise. Olgu $y = 8^u$ ja $u = 2-3x+3x^2$, siis liitfunktsiooni diferentseerimise reegli põhjal

$(8^{2-3x+3x^2})' = (8^u)'\cdot(2-3x+3x^2)' = 8^u \ln 8\cdot(-3+6x) = 3(2x-1)8^{2-3x+3x^2}\cdot\ln 8$.

A

602. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y = 3^x$; 2) $y = 10^x$; 3) $y = 0{,}88^x$;
4) $y = 100^x$; 5) $y = 16e^x$; 6) $y = -4\cdot 5^x$;
7) $y = 4^{8x}$; 8) $y = 5^{0{,}2x}$; 9) $y = 6^{-3x}$.

603. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y = 3^{2+x}$; 2) $y = 10^{x-2}$; 3) $y = 2^{4+x}$;
4) $y = xe^x$; 5) $y = 2^x\cdot 8^x$; 6) $y = 3^x\cdot 2^x$.

604. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y = e^{7x^3-3x}$; 2) $y = 4^{\sqrt{x}}$; 3) $y = e^{-x}\ln x$;
4) $y = \sqrt{10^x}$; 5) $y = 12^{1-x}$; 6) $y = 8^{x^3-x^2}$.

605. Leidke funktsioonide $y = 10^x$ ja $y = 100^x$ puutuja tõus ning tõusunurk kohal $x = 0$. Sitseerige samasse koordinaatteljestikku nende funktsioonide graafikud ja kõnealused puutujad.

606. Milline on funktsiooni $y = e^x$ puutuja tõus ja tõusunurk kohal $x = 0$?

B

607. Leidke ülesandes 587 antud funktsioonide tuletised.

4.18. * ARKUSFUNKTSIOONIDE TULETISED

1. Funktsiooni y = arcsin x tuletis.

Et antud funktsiooni ja pöördfunktsiooni mõiste on vahetatavad, siis vaatleme funktsiooni $y = \arcsin x$ ja selle pöördfunktsiooni $x = \sin y$, kus $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

Nüüd

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Lühemalt:

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

Näide 1.

Leiame $y = \arcsin(3x-1)$ tuletise.

Lahendus.

Tegemist on liitfunktsiooniga $y = \arcsin t$, $t = 3x-1$. Seega

$$[\arcsin(3x-1)]' = (\arcsin t)' \cdot (3x-1)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{1-(3x-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6x-9x^2}}.$$

2. Funktsiooni y = arccos x tuletis.

Arutledes analoogiliselt, võrreldes arkussiinusfunktsiooni tuletise leidmisega saame, et

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

Näide 2.

Leiame $(\arccos 4x)'$. Liitfunktsiooni $y = \arccos u$, $u = 4x$ korral on

$$(\arccos 4x)' = (\arccos u)' \cdot (4x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot 4 = -\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}.$$

3. Funktsiooni y = arctan x tuletis.

Vaatleme funktsiooni $y = \arctan x$ ja selle pöördfunktsiooni $x = \tan y$, kus $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Siis

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} =$$

$$= \frac{1}{1+(\tan(\arctan x))^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Lühemalt:

$$\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.}$$

Näide 3.

Leiame $y = \arctan x - \arccos x$ tuletise:

$$(\arctan x - \arccos x)' = (\arctan x)' - (\arccos x)' =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{1-x^2+(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}{1-x^4}.$$

608. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y = (1-x^2)\arcsin x$;
2) $y = x \cdot \arccos x$;
3) $y = \frac{\arcsin x}{1-x^2}$;
4) $y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$;
5) $y = \arcsin x^2$;
6) $y = \arccos 4x$;
7) $y = (1+x^2)\arctan x$;
8) $y = \arctan(5x^2 - 2x)$;
9) $y = \arcsin x + \arccos x$;
10) $y = x^2 \arctan x$.

609. Leidke funktsiooni $y = \arccos x$ graafiku puutuja tõus ja tõusunurk kohal null.

610. Millise nurga all lõikab funktsiooni $y = \arcsin x$ ja $y = \arctan x$ graafik x-telge?

611. Leidke funktsiooni tuletis:

1) $y = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;
2) $y = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2}$.

Enesekontrolliks

612. Defineerige funktsiooni $y = g(x)$ piirväärtus kohal b.

613. Kirjutage sümboleis: *funktsiooni $f(x)$ piirväärtus kohal a on arv A.*

614. Leidke piirväärtus.

1) $\lim\limits_{x\to 2}(-6x^3 + 7x^2 - x + 1)$;
2) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-9}$;
3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^6 - 4x^3 + x - 5}{4x^6 + 2x^5 - x^2}$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+5}{x}$;
5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{\cos x}$;
6) $\lim\limits_{x\to -2} 13$.

615. Kas funktsioonil $y = f(x)$ on olemas kohal a ja b piirväärtus, kui
1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ ja 2) $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$?

616. Funktsioonil $y = f(x)$ puudub kohal b lõplik piirväärtus, kui on kirjutatud, et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$. Mida siis tähendab või näitab see kirjutis?

617. Kirjutage või sõnastage, kuidas avaldub kahe funktsiooni summa, vahe, korrutise ja jagatise piirväärtus.

618. Milliseid määramatusi piirväärtuse leidmisel teate? Kuidas neist määramatustest vabaneda? Tooge näiteid.

619. Millega võrduvad piirväärtused

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ ja 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$?

620. Kuidas leida funktsiooni graafiku (joone) rõhtasümptooti, püstasümptooti?

621. Nimetage vähemalt kolm funktsiooni, millel on püstasümptoot, ja kolm funktsiooni, millel on rõhtasümptoot.

622. Kuidas avaldub funktsiooni $y = f(x)$ muut?

623. Leidke Δy üldavaldis, kui $y = x^2 - \sin x$.

624. Funktsiooni pidevuse kohta on õpikus antud kaks tunnust. Millised need on? Kuidas avaldub funktsiooni pidevus geomeetriliselt?

625. Defineerige funktsiooni tuletis.

626. Milline on tuletise füüsikaline tähendus ja milline geomeetriline tähendus?

627. Kirjutage üles kõigi seni õpitud funktsioonide tuletised.

628. Millised on funktsioonide summa, vahe, korrutise ja jagatise diferentseerimise reeglid?

629. Leidke funktsioonide tuletised.

1) $y = 0{,}3x^{10}$;
2) $y = 2x^{-3}$;
3) $y = 27$;
4) $y = 3^x + \ln x$;
5) $y = \sin x \cdot \tan x$;
6) $y = x\sqrt{x}$;
7) $y = \dfrac{8-3x}{x^2+7}$;
8) $y = \dfrac{1}{x}$;
9) $y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

630. Leidke funktsiooni $y = x^3$ graafiku puutuja tõus ja tõusunurk kohal $x = 0{,}5$.

631. Mis on funktsiooni diferentseerimine?

632. Mis on liitfunktsioon? Tooge mõni näide.

633. Kuidas leitakse liitfunktsiooni tuletist?

634. Leidke funktsioonide tuletised.

1) $y = (x^3 - 0{,}5x^2)^{17}$;
2) $y = \cos(4x^2 - 5x + 3)$;
3) $y = \sqrt{e^x}$;
4) $y = 10^{3x+2}$;
5) $y = \log_4(\tan x)$;
6) $y = \ln^2 x$;
7) $y = \arccos(6 - 8x)$;
8) $y = \arctan x^{-3}$.

5. FUNKTSIOONI TULETISE RAKENDUSI

5.1. HETKKIIRUS

Vaatleme funktsioone, mis kirjeldavad mingi protsessi muutumist sõltuvalt ajast. Mitmete muude faktorite kõrval võib ajast sõltuda näiteks:

– keha poolt läbitud teepikkus.
– tilkuva õlireservuaari poolt tekitatava õlilaigu pindala;
– auto vigastatud õhukummi ruumala kummi tühjenedes jne.

Nagu teame, väljendab selliste funktsioonide tuletis antud kohal kirjeldatava protsessi muutumise hetkkiirust vastaval hetkel:

$v(t_0) = f'(t_0)$,

kus f ja v on funktsioonid, mis kirjeldavad vastavalt antud protsessi muutumist ning selle protsessi muutumise hetkkiirust sõltuvalt ajast t. Seega kui keha poolt aja t jooksul läbitud teepikkust kirjeldab funktsioon $s(t)$, siis avaldub selle keha kiirus hetkel t järgmiselt:

$v(t) = s'(t)$.*

Leides siit nüüd $v'(t)$, saame valemi kiiruse muutumise kiiruse ehk kiirenduse $a(t)$ arvutamiseks:

$a(t) = v'(t)$.

---

* s, v ja a on märgiga suurused. Nende sisulisel tõlgendamisel tuleb alati silmas pidada seda, kuidas täpselt vaadeldav keha lähtepunkti suhtes liigub.

Näide 1.

Sirgjooneliselt liikuva keha asukoht sirgel on määratud valemiga

$s(t) = -3t^2 + 24t + 1$,

kus $s(t_0)$ on keha koordinaat sellel sirgel hetkel t_0*.

Sellisel juhul öeldakse, et keha liigub sirgjooneliselt seaduse $s(t)$ järgi. Leiame:

a) valemid selle keha kiiruse ja kiirenduse arvutamiseks suvalisel hetkel;

b) keha kiiruse ja kiirenduse hetkel $t_0 = 2$;

c) mitme sekundi pärast jääb keha seisma?

Leiame esmalt valemid kiiruse ja kiirenduse arvutamiseks suvalisel hetkel.

$v(t) = s'(t) = -6t + 24$,

$a(t) = v'(t) = -6$.

Arvutame nüüd kiiruse hetkel $t_0 = 2$.

$$v(2) = -6 \cdot 2 + 24 = 12\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right).$$

Keha kiirendus on konstantne, olles hetkel $t_0 = 2$ $-6\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Hetkel, millal keha jääb seisma, on tema kiirus null. Seega lahendades võrrandi

$-6t + 24 = 0$,

saame vastuse ka viimasele küsimusele: keha jääb seisma 4 sekundi möödudes.

Näide 2.

Sirgjooneliselt liikuva keha asukoht sirgel on määratud valemiga

$$s(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 - 4.$$

Leiame selle keha liikumise kiiruse hetkel, kui tema kiirendus on null.

Leiame valemid keha kiiruse ja kiirenduse arvutamiseks.

$v(t) = s'(t) = -t^2 + 4t$ ja

$a(t) = v'(t) = (-t^2 + 4t)' = -2t + 4$.

Võrrandist $-2t + 4 = 0$ saame, et kiirus tuleb leida hetkel $t_0 = 2$. Seega

$$v(t_0) = v(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 = 4\ \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right).$$

Vastus. Hetkel, mil antud keha kiirendus on null, on tema kiirus $4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

---

* Kasutatavad mõõtühikud, kui neid pole eraldi lisatud, on analoogsetes ülesannetes siin ja edaspidi meeter ning sekund. Samuti säilivad edasises suuruste $s(t)$ ja t tähendused.

A

635. Punkt liigub sirgjooneliselt seaduse $s = 5t + 6$ järgi. Leidke

1) liikumise hetkkiirus hetkel $t_1 = 3$ ja $t_2 = 5{,}6$;

2) kiirendus mõlemal nimetatud hetkel.

636. Punkt liigub sirgjooneliselt seaduse $s = t^3 - 4t^2$ järgi. Leidke punkti kiirus ja kiirendus hetkel $t = 5$. Millisel hetkel on punkti liikumise kiirendus null?

637. Punkt liigub sirgjooneliselt seaduse $s = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$ järgi. Leidke

1) liikumise hetkkiirus ja kiirendus liikumise teise sekundi lõpul;

2) mitmenda sekundi lõpul jääb punkt seisma?

638. 300 meetri kõrgusel olevast helikopterist allavisatud pakk langeb seaduse $s = 4{,}9t^2$ järgi. Leidke

1) mitmendal sekundil põrkub pakk maaga;

2) paki kukkumise kiirus ja kiirendus langemise 4. sekundi lõpul;

3) hetk, millal paki liikumise kiirus saab võrdseks nulliga.

639. Sügavasse kraatrisse lasti kukkuda kivi, mis langes seaduse $s = 4{,}9t^2$ järgi. Kui sügav on kraater, kui kivi langes kraatri põhja 10 sekundiga? Kui suur on kivi liikumise kiirus põhja langemise hetkel?

640. Bakterite arv N teatavas biomassis muutub seaduse $N = 450 + 52t + 2t^2$ järgi. Kui suur oli bakterite lähtearv biomassis? Kui suur on bakterite juurdekasv ajamomendil $t = 3{,}5$ min?

641. Pall liikus pärast heidet maa suhtes vertikaalselt seaduse $s = 2 + 20t - 5t^2$ (s – kaugus maapinnast meetrites) järgi. Vastake järgmistele küsimusele.

1. Kui kõrgelt pall visati?
2. Kui suur oli palli liikumise algkiirus?
3. Kas pall visati üles või alla (uurige kiirendust)?
4. Mitu sekundit pärast viset asus pall maapinnast kõige kõrgemal, kui kõrgel?
5. Mitu sekundit pärast viset kukkus pall maha?
6. Kui suur oli palli kiirus mahakukkumise hetkel?

B

Näide 3.

Õlireservuaarist mahavalguv õli moodustab ringikujulise laigu, mille raadius kasvab konstantse kiirusega 0,5 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Arvutame mahavalgunud õlilaigu pindala kasvamise kiiruse hetkel, kui laigu raadius on 18 cm.

Olgu t lekke kestus sekundites, r ja S vastavalt õlilaigu raadius sentimeetrites ning õlilaigu pindala ruutsentimeetrites pärast t sekundit väldanud leket. Pindala muutumise kiirus v avaldub sellisel juhul valemiga

$$v = S'(t), \text{ kus } S = \pi r^2.$$

Et õlilaigu raadius on ise aja t funktsioon, siis on meil antud juhul tegemist liitfunktsiooniga. Vastavalt liitfunktsiooni diferentseerimisvalemile saame nüüd, et

$$S'(t) = S'(r) \cdot r'(t) = 2\pi r \cdot r'(t).$$

Ülesande tingimuste kohaselt on laigu raadiuse muutumise kiirus $r'(t)$ konstantne, võrdudes igal hetkel 0,5 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Seega

$$S'(t) = 2\pi r \cdot 0{,}5 = \pi r.$$

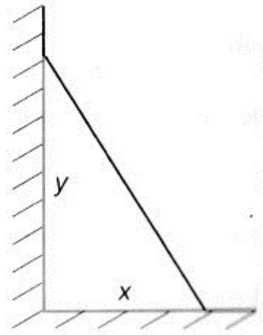
Et arvutada õlilaigu pindala kasvamise kiirus hetkel, kui laigu raadius on 18 cm, siis leiame viimatisaadud tuletisfunktsiooni väärtuse kohal $r = 18$:

$$v = S'(t)_{r=18} = 18\pi \approx 56{,}5 \ \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}.$$

Vastus. Hetkel, kui õlilaigu raadius on 18 cm, kasvab tema pindala kiirusega 56,5 $\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$.

Näide 4.

Viie meetri pikkune redel (joon. 5.1) libiseb mööda majaseina alla nii, et redeli alumine ots eemaldub seinast konstantse kiirusega 0,3 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Leiame, kui kiiresti langeb redeli ülemine ots allapoole hetkel, kui alumise otsa kaugus majast on 3 m.



Joon. 5.1

Olgu t aeg sekundites redeli libisemise algusest, x ja y vastavalt redeli alumise otsa kaugus majaseinast ning ülemise otsa kaugus maapinnast. Kasutades Pythagorase teoreemi avaldame y-i muutuja x funktsioonina:

$$y = \sqrt{25 - x^2}. \qquad (1)$$

Leiame nüüd valemi y-i muutumiskiiruse $v = y'(t)$ arvutamiseks. Et x on aja t funktsioon, siis tuleb meil jällegi kasutada liitfunktsiooni diferentseerimise valemit:

$$v = y'(t) = y'(x) \cdot x'(t) = \frac{-2}{2\sqrt{25 - x^2}} \cdot x'(t).$$

Arvestades seost 1 saame siit, et

$$y'(t) = -\frac{x}{y} \cdot x'(t).$$

Ülesande tingimustele vastavalt $x = 3$ ja seega $y = 4$. Arvestades veel seda, et $x'(t) = 0{,}3\ \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$ saame, et

$$v = y'(t)_{x=3} = -\frac{3}{4} \cdot 0{,}3 = -0{,}225\ \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right).$$

Miinusmärk saadud tulemuses näitab seda, et muutuja x kasvades muutuja y väärtused kahanevad.

Vastus. Redeli ülemise otsa langemise kiirus nõutud hetkel on $0{,}225\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

642. Mööda sirget liigub kaks punkti, üks seaduse $s_1 = 4t^2 - 3$, teine seaduse $s_2 = t^3$ järgi. Leidke ajavahemik, milles esimese punkti kiirus on teise omast suurem.

643. Õli valgub purunenud laevalt veepinnale, moodustades seal ringikujulise laigu, mille pindala kasvab konstantse kiirusega 6 $\frac{\text{km}^2}{\text{h}}$. Kui kiiresti kasvab selle ringi raadius hetkel, kui ringi pindala on 9 km^2?

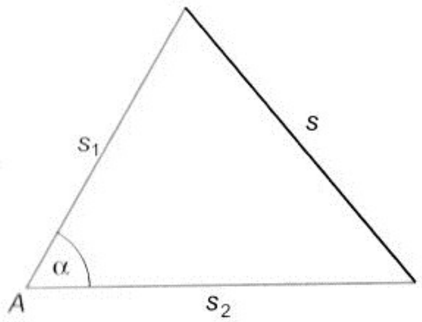
644. 13 meetri pikkune tuletõrjeredel libiseb mööda seina nii, et tema ülemine ots liigub otse alla ühtlase kiirusega 2 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kui kiirelt kaugeneb selle redeli alumine ots majaseinast hetkel, kui ülemise otsa kaugus maapinnast on 5 m?

645. Kuubi ruumala kasvab pidevalt. Hetkel, kui kuubi ruumala on 2 $\frac{\text{cm}^3}{\text{min}}$, on selle kuubi serva pikkus 5 cm. Kui kiirelt kasvab samal hetkel kuubi täispindala?

646. Silindri mõõtmed muutuvad pidevalt. Hetkel, kui silindri diameeter kasvab kiirusega 2 $\frac{\text{cm}}{\text{min}}$, on tema kõrgus ja raadius vastavalt 10 cm ja 40 cm. Millise kõrguse muutumise kiiruse korral jääb silindri ruumala muutumatuks?

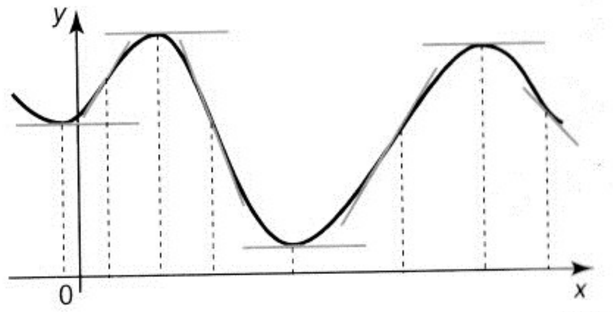
647. Teatud nakkushaigus levib selliselt, et elanike haigestumisprotsent p sõltub ajast t (ööpäevades) järgmiselt: $p = 0{,}005(15t^2 - t^3)$, kus $0 \le t \le 15$. Mitmendal päeval saavutab haigestumise protsendi kasvamise kiirus maksimumi?

648. Punktist A lähtub kaks kiirt, mille vaheline nurk on 60°. Mööda neid kiiri alustab punktist A liikumist kaks putukat (joon. 5.2). Esimene neist liigub ühtlaselt kiirusega 2 $\frac{\text{cm}}{\text{min}}$, teise liikumine allub seadusele $s = -t^2 + 6t$ (t – aeg minutites, $0 < t < 6$, s – kaugus punktist A sentimeetrites). Millise kiirusega eemalduvad putukad teineteisest liikumise 2. minuti lõpul?



$s = s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2 \cos \alpha$

Joon. 5.2

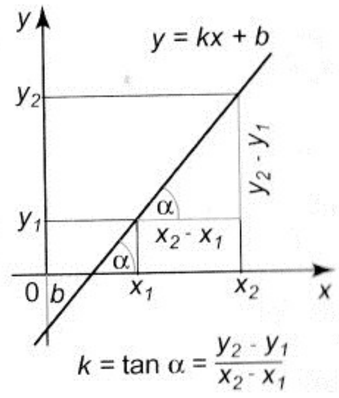


Joon. 5.3

5.2. JOONE PUUTUJA TÕUS

649. Joonisel 5.3 on esitatud funktsiooni $y = f(x)$ graafiku puutujad mõnede argumendi x väärtuste korral.

1. Kirjeldage graafiku puutuja asendit, kui puutuja on joonestatud kohal, mis on funktsiooni
a) kasvamisvahemikus;
b) kahanemisvahemikus ja
c) ekstreemumkoht.
2. Mitmendasse veerandisse kuulub puutuja ja x-telje positiivse suuna vaheline nurk, kui puutuja on joonestatud kohal, mis on funktsiooni
a) kasvamisvahemikus;
b) kahanemisvahemikus ja
c) ekstreemumkoht?



$k = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Joon. 5.4

Nagu ülesandes 649 nägime, saab funktsiooni graafiku puutuja kohta olevat teavet edukalt kasutada funktsiooni uurimisel – s.o. tema kasvamis- ja kahanemisvahemike, ekstreemumkohtade jne. leidmisel. Puutujat ennast aga, nagu iga mittevertikaalset sirget, iseloomustavad tema tõus k ja algordinaat b (joon. 5.4). Puutuja tõusu kasutamist funktsioonide uurimisel me järgnevas vaatlemegi. Meenutame, et

kui funktsioon $y = f(x)$ on diferentseeruv kohal x_0, siis tema graafikule kohal x_0 joonestatud puutuja tõus

$$k = \tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \tan\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$ (joon. 5.5).

Näide 1.

Leiame parabooli $y = 4x - x^2$ puutuja tõusu kohal $x_0 = 1$.

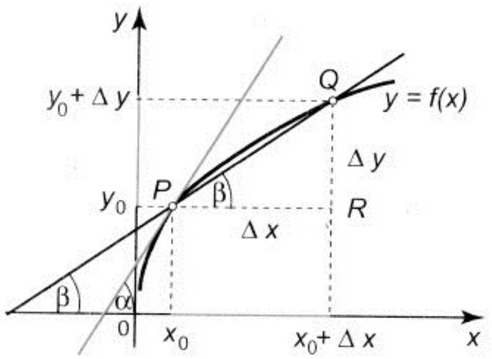
Leiame esmalt funktsiooni $y = 4x - x^2$ tuletise:

$y' = 4 - 2x$.

Arvutame seejärel tuletise väärtuse kohal $x_0 = 1$, mis ongi otsitud puutuja tõus.

$k = y'(1) = 4 - 2 \cdot 1 = 2$.

Vastus. Funktsiooni graafikule kohal $x_0 = 1$ joonestatud puutuja tõus on 2.



Joon. 5.5

Näide 2.

Leiame muutuja x väärtused, mille korral funktsiooni $y = \frac{1}{3}x^3$ graafiku puutuja tõusunurk on 45°.

Et $\tan 45° = 1$, siis tuleb antud ülesande lahendamiseks leida x-i need väärtused, mille korral funktsiooni $y = \frac{1}{3}x^3$ graafiku puutuja tõus on 1. Seega tuleb leida lahend võrrandile $y' = 1$. Et

$y' = x^2$, siis $x^2 = 1$,

millest $x = \pm 1$.

Vastus. Funktsiooni $y = \frac{1}{3}x^3$ graafikule joonestatud puutuja moodustab x-teljega 45°-se nurga, kui puutuja on joonestatud kas kohal $x_1 = 1$ või kohal $x_2 = -1$.

Näide 3.

Leiame muutuja x need väärtused, mille korral funktsiooni $y = \frac{x}{1-x}$ graafiku puutuja tõus on positiivne.

Muutuja x nõutud väärtuste leidmiseks tuleb lahendada võrratus $y' > 0$. Et

$y' = \frac{1 \cdot (1-x) - x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$, siis $\frac{1}{(1-x)^2} > 0$.

Saadud võrratust rahuldavad aga kõik lähtefunktsiooni määramispiirkonda kuuluvad arvud.

Vastus. Funktsiooni $y = \frac{x}{1-x}$ graafiku puutuja tõus on positiivne selle funktsiooni määramispiirkonna igas punktis.

A

650. Kirjeldage sirge $y = kx + b$ asendit xy-teljestikus, kui tema tõus on 1) negatiivne; 2) null; 3) positiivne. Milline on igal nimetatud juhul sirge tõusunurk?

651. Leidke funktsiooni $y = f(x)$ graafiku puutuja tõus kohal x_0.

1) $y = x^2 + 2x + 1$, $x_0 = 0{,}5$;
2) $y = 2x^2 - 3x + 1$, $x_0 = 2$;
3) $y = \sin x$, $x_0 = 0$;
4) $y = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
5) $y = \frac{x}{2x+1}$, $x_0 = -2$;
6) $y = \frac{x^2+1}{x}$, $x_0 = -1$.

652. Leidke argumendi x väärtused, mille korral funktsiooni $y = f(x)$ graafiku puutuja moodustab x-teljega 45°-se nurga.

1) $y = e^x$;
2) $y = \log x$;
3) $y = -\frac{1}{x}$;
4) $y = x - 4$.

653. Leidke argumendi x väärtused, mille korral funktsiooni $y = f(x)$ graafiku puutuja on paralleelne x-teljega.

1) $y = 3x^3 - 16x$;
2) $y = x^3 - 3x^2$;
3) $y = 2x^3 - 30x^2 + 126x$;
4) $y = 4x^3 - 21x^2 + 18x$;
5) $y = x^3 - 2x^2 + 4x$;
6) $y = (2x+1)(x^2+1)$.

654. Leidke tuletise abil parabooli haripunkti abstsiss.

1) $y = x^2 + x + 1$;
2) $y = 3x^2 - 2x + 4$;
3) $y = ax^2 + bx + c$.

655. Leidke muutuja x väärtused, mille korral funktsiooni $y = f(x)$ graafiku puutuja moodustab x-telje positiivse suunaga teravnurga.

1) $y = -x^3 + 15x^2 - 75x - 3$;
2) $y = x^3 - 6x^2 + 45x + 3$;
3) $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 6$;
4) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 3$;
5) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$;
6) $y = \dfrac{x^2 - 1}{2x+1}$.

B

656. Leidke muutuja x väärtused, mille korral funktsiooni $y = f(x)$ graafiku puutuja moodustab x-telje positiivse suunaga nürinurga.

1) $y = \sqrt{1 - x^2}$;
2) $y = \ln \cos x$;
3) $y = \sin x \cdot \cos x$;
4) $y = x \cdot e^{2x}$.

657. Milliste arvu a väärtuste korral on funktsiooni $y = x^3 + ax^2 + 3x$ graafiku kõikidest punktidest joonestatud puutujate tõusud positiivsed?

658. Leidke sellised arvud a ja b, mille korral sirge $y = 2x - 2$ puutub parabooli $y = ax^2 + bx + 2$ punktis $(2; 2)$. Tehke vastav joonis arvutil ja kontrollige saadud vastust.*

659. Leidke sellised arvud a ja b, mille korral funktsiooni $y = ax^3 + x^2 + bx$ graafiku punktist $(-1; 1)$ joonestatud puutuja moodustab x-telje positiivse suunaga nurga 45°.

660. Leidke punkt, milles funktsioonide $y = 1 + x + x^2$ ja $y = (1 - x)^{-1}$ graafikutel on ühine puutuja. Milline on nurk selle puutuja ja x-telje positiivse suuna vahel?

661. Näidake, et funktsioonide $y = -x^2$ ja $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{1}{2}$ graafikud puutuvad teineteisega. Milline on selle puutepunkti abstsiss ja ühise puutuja tõus? Tehke vastav joonis arvutil ja kontrollige saadud vastust.

* Kasutamiseks sobivad nii personaalarvuti kui ka graafiline taskuarvuti.

5.3. JOONE PUUTUJA VÕRRAND

662. Angaari katuse ristlõige avaldub valemiga $y = -0,25(x^2 - 25)$ (pikkus on mõõdetud meetrites, joon. 5.6). Punktis A soovitakse angaari kindlustada katust puutuva sirge sihis oleva trossiga. Kui kaugel angaari müürist tuleb kinnitada sellise trossi teine ots?

Selle ülesande saaksime lahendada siis, kui oskaksime leida joont $y = -0,25(x^2 - 25)$ punktis A puutuva sirge lõikepunkti x-teljega. Selleks aga peame oskama koostada joone puutuja võrrandit.

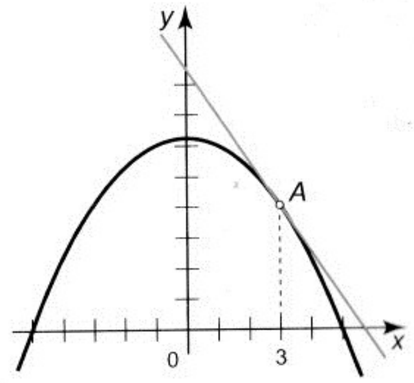
Joonele $y = f(x)$ punktis $(x_0; y_0)$ joonestatud puutuja võrrand avaldub kujul $y = kx + b$. Selles võrrandis oskame määrata sirge tõusu k:

$$k = f'(x_0).$$

Algordinaadi b leidmiseks kasutame tõsiasja, et punkt $(x_0; y_0)$ asub puutujasirgel. Kui mingi punkt asub sirgel, siis tema koordinaadid rahuldavad selle sirge võrrandit. Seega

$$y_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + b,$$

millest $b = y_0 - x_0 \cdot f'(x_0)$.



Joon. 5.6

Asendades leitud tõusu ja algordinaadi võrrandisse $y = kx + b$ saame, et joonele $y = f(x)$ punktis $(x_0; y_0)$ joonestatud puutuja võrrand avaldub kujul:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0.$$

Näide 1.

Leiame paraboolile $y = x^2 + 2x - 1$ kohal $x_0 = 2$ joonestatud puutuja võrrandi.

Arvutame esmalt puutepunkti ordinaadi.

$$y_0 = f(x_0) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 7.$$

Leiame seejärel punktis $(2; 7)$ joonestatud puutuja tõusu. Et $y' = 2x + 2$, siis

$$k = f'(x_0) = y'(x_0) = 2 \cdot 2 + 2 = 6.$$

Asendame saadud arvud puutuja võrrandisse ja saame, et

$$y = 6x - 5.$$

Vastus. Otsitud puutuja võrrand on $y = 6x - 5$.

Näide 2.

Paraboolile $y=\frac{1}{2}x^2+3x-1$ on joonestatud sirgega $x-2y+2=0$ paralleelne puutuja. Leiame selle puutuja võrrandi.

Et paralleelsete sirgete tõusud on võrdsed, siis on otsitava puutuja tõus võrdne antud sirge tõusuga. Avaldame antud sirge võrrandist muutuja y.

$y=\frac{1}{2}x+1.$

Seega puutuja tõus $k=\frac{1}{2}$.

Leiame nüüd paraboolil punkti, mida läbiva puutuja tõus on $\frac{1}{2}$. Selleks tuleb lahendada võrrand $f'(x)=\frac{1}{2}$. Saame, et $x+3=\frac{1}{2}$, millest $x_0=-2\frac{1}{2}$. Funktsiooni $y=\frac{1}{2}x^2+3x-1$ väärtus sellel kohal $y_0=-5\frac{3}{8}$.

Asendades saadud arvud puutuja võrrandisse saame, et

$y=\frac{1}{2}x-4\frac{1}{8}.$

Vastus. Otsitud puutuja võrrand on $y=\frac{1}{2}x-4\frac{1}{8}$.

A

663. Leidke võrrand sirgele, kui sirge üks punkt on A ja sirge ning x-telje positiivse suuna vaheline nurk α.

1) $A(2;-3)$, $\alpha=45°$; 2) $A(0;2)$, $\alpha=120°$; 3) $A(0;0)$, $\alpha=90°$.

664. Leidke võrrand sirgele, kui sirge üks punkt on A ja tõus k. Kirjeldage sirge asendit koordinaatteljestikus.

1) $A(-1;3)$, $k=\sqrt{3}$; 2) $A(0;-5)$, $k=-1$; 3) $A(0;0)$, $k=0$.

665. Leidke joone puutuja võrrandid punktides, mille abstsissid on:

1) $y=x^2+1$, kui $x_1=2$ ja $x_2=-1$;

2) $y=-3x^2+2x-1$, kui $x_1=-2$ ja $x_2=3$;

3) $y=\sin x$, kui $x_1=0$ ja $x_2=\frac{2\pi}{3}$;

4) $y=\frac{x-1}{x+1}$, kui $x_1=2$ ja $x_2=-3$;

5) $y=x\cdot 2^x$, kui $x_1=1$ ja $x_2=0$;

6) $y=\frac{\ln x}{x}$, kui $x_1=e$ ja $x_2=e^{-2}$;

7) $y=\frac{\sqrt{x}}{2x-1}$, kui $x_1=1$ ja $x_2=-4$.

666. Leidke võrrand joone ühele sellisele puutujale, mis moodustab x-telje positiivse suunaga nurga α.

1) $y=-\frac{1}{2}x^2-\sqrt{3}\cdot x$, kui $\alpha=60°$; 2) $y=2\cos x$, kui $\alpha=120°$;

3) $y=xe^x$, kui $\alpha=0°$; 4) $y=\tan x$, kui $\alpha=45°$.

667. Leidke võrrand joone sellisele puutujale, mille tõus on k.

1) $y=-x^2+3x$, kui $k=9$;

2) $y=\tan x$, kui $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ja $k=1$;

3) $y=\log x$, kui $k=\log e$;

4) $y=x\ln x$, kui $k=-1$.

668. Lõpetage ülesande 662 lahendus.

669. Leidke joone $y=x^2-5x+6$ puutuja võrrand, kui puutepunktiks on joone lõikepunkt y-teljega. Kontrollige saadud vastust joonise abil arvutil.

670. Leidke joone $y=\frac{x-6}{x-2}$ puutuja võrrand, kui puutepunktiks on joone lõikepunkt y-teljega. Kontrollige saadud vastust joonise abil arvutil.

B

671. Leidke võrrand joone sellisele puutujale, mis moodustab x-telje positiivse suunaga nurga α.

1) $y=\sqrt{8-x^2}$, kui $\alpha=45°$; 2) $y=\ln(2x+1)$, kui $\alpha=60°$;

3) $y=\cos 2x$, kui $\alpha=0°$; 4) $y=e^{2x-4}$, kui $\alpha=45°$.

672. Leidke joone $y=(x^7+x)^2$ puutuja võrrand, kui puutepunktiks on joone lõikepunkt x-teljega. Kontrollige saadud vastust joonise abil arvutil.

673. Leidke funktsiooni $y=x^3-x^2+x-1$ graafikule selle funktsiooni nullkohas joonestatud puutuja võrrand. Kontrollige saadud vastust joonise abil arvutil.

674. Leidke funktsiooni $y = x^3 - 2x + 4$ graafiku puutuja algordinaat kohal, kus selle funktsiooni graafik lõikub funktsiooni $y = x^3$ graafikuga.

675. Millistes punktides on joone $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$ puutujad paralleelsed sirgega $y - 12x + 10 = 0$?

676. Leidke võrrand joone $y = x^2 + x - 4$ sellisele puutujale, mis on paralleelne sirgega $y = -5x + 2$.

677. Leidke võrrand joone $y = \dfrac{x-1}{x}$ sellisele puutujale, mis on paralleelne sirgega $8x - 2y + 1 = 0$.

678. Leidke joone $y = 2x^2 + 2$ need puutujad, mis läbivad koordinaatide algus-punkti. Kontrollige saadud vastust joonise abil arvutil.

679. Leidke joone $y = e^x$ puutuja, mis läbib punkti (0; 0). Kontrollige saadud vastust arvutil.

680. Leidke joone $y = \dfrac{1}{4}x^2 - 2$ puutuja, mis läbib punkti (2; –2). Kontrollige saadud vastust arvutil.

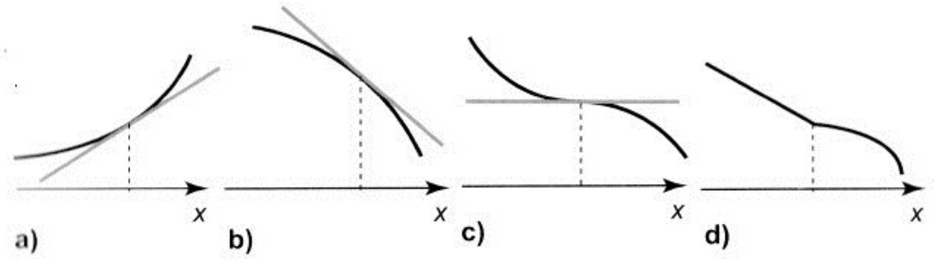
5.4. FUNKTSIOONI KASVAMINE JA KAHANEMINE

Et saada informatsiooni funktsiooni käitumisest (kasvamine, kahanemine, ekstreemumid jne.) mingis piirkonnas, ei pea meil tingimata kasutada olema selle funktsiooni graafik. Osates rakendada funktsiooni tuletist, tuleme selle ülesandega edukalt toime ka siis, kui teame vaid funktsiooni esitavat valemit. Tutvumegi järgnevas tuletise selliste rakendustega lähemalt.

Olgu funktsioon $f(x)$ diferentseeruv mingis vahemikus $(a; b)$. Sellisel juhul on funktsioonil iga $x \in (a; b)$ korral tuletis $f'(x)$. See tuletis on kas positiivne, negatiivne või null. Kui 1) $f'(x) > 0$, siis moodustab funktsiooni graafiku puutuja abstsisstelje positiivse suunaga teravnurga, kui 2) $f'(x) < 0$, siis nürinurga ja kui 3) $f'(x) = 0$, siis on graafiku puutuja paralleelne abstsissteljega.

Jooniselt 5.7a näeme, et kui iga $x \in (a; b)$ korral on funktsiooni graafiku puutujal abstsisstelje positiivse suunaga teravnurk, siis on see funktsioon vahemikus $(a; b)$ kasvav. Kui aga iga $x \in (a; b)$ korral on vaadeldav nurk nürinurk, siis on see funktsioon vahemikus $(a; b)$ kahanev (joon. 5.7b). Seega

kui $f'(x) > 0$ vahemikus $(a; b)$, siis on funktsioon selles vahemikus kasvav;
kui $f'(x) < 0$ vahemikus $(a; b)$, siis on funktsioon selles vahemikus kahanev.



Joon. 5.7

Küsime nüüd, kas ülaltoodud tingimus on vältimatult vajalik, s.o. tarvilik selleks, et funktsioon* oleks antud vahemikus kasvav (kahanev)? Seega küsime, kas alati, kui funktsioon on kasvav (kahanev) mingis vahemikus, leidub sellel funktsioonil ka iga x korral sellest vahemikust positiivne (negatiivne) tuletis? Jooniselt 5.7 näeme, et funktsioon võib olla vahemikus $(a; b)$ kasvav (kahanev) ka juhul, kui mingi x korral sellest vahemikust $f'(x) = 0$ (joon. 5.7c) või see tuletis puudub üldse (joon. 5.7d).

Niisiis selleks, et leida funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikke, tuleb lahendada vastavalt kas võrratus $f'(x) > 0$ või $f'(x) < 0$. Nende võrratuste lahendihulgad ühtivadki üldjuhul funktsiooni $f(x)$ kasvamis- ja kahanemisvahemikkudega.
Kui funktsiooni tuletis mingi x korral puudub või on võrdne nulliga, siis tuleb selgitada, kas sellel kohal ei toimu kasvamise üleminekut kahanemiseks või vastupidi. Kui ei, siis loetakse ka see argumendi väärtus vastavalt kas siis kasvamis- või kahanemisvahemikku kuuluvaks.

Sageli kasutatakse ka mõisteid funktsiooni kasvamine (kahanemine) antud kohal.

Öeldakse, et funktsiooni $y = f(x)$ on kasvav (kahanev) kohal x_0, kui leidub seda kohta sisaldav ümbrus $(x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$, milles see funktsioon kasvab (kahaneb).

On võimalik tõestada, et

kui $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), siis on funktsioon kasvav (kahanev) kohal x_0.

* Kui puudub eraldi märge, siis piirdume siin ja edaspidi pidevate funktsioonidega. Funktsiooni diferentseeruvust me vaadeldava vahemiku kõikides punktides üldjuhul ei eelda.

Näide 1.

Selgitame, kas funktsioon $y = x^3 - 12x$ on kohal $x_0 = 1$ kasvav või kahanev.

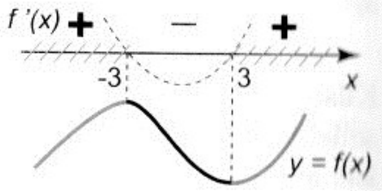
Selleks tuleb määrata antud funktsiooni tuletise märk kohal $x_0 = 1$. Et $y' = 3x^2 - 12$ ja $y'(1) = 3 \cdot 1^2 - 12 = -9 < 0$, siis on vaadeldav funktsioon kohal $x_0 = 1$ kahanev.

Vastus. Funktsioon $y = x^3 - 12x$ on kohal $x_0 = 1$ kahanev.

Näide 2.

Leiame funktsiooni $y = 2x^3 - 54x$ kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

Selleks tuleb lahendada võrratused $y' > 0$ ja $y' < 0$.



Joon. 5.8

Avaldame funktsiooni tuletise: $y' = 6x^2 - 54$.

Võrratusest $6x^2 - 54 > 0$ saame, et vaadeldav funktsioon kasvab vahemikes $(-\infty; -3)$ ja $(3; \infty)$ (joon. 5.8).

Analoogiliselt leiame võrratusest $6x^2 - 54 < 0$, et funktsioon $y = 2x^3 - 54x$ kahaneb vahemikus $(-3; 3)$.

Vastus. Funktsioon $y = 2x^3 - 54x$ kasvab vahemikes $(-\infty; -3)$ ja $(3; \infty)$ ning kahaneb vahemikus $(-3; 3)$.

A

681. Selgitage, kas argumendi antud väärtused kuuluvad funktsiooni kasvamis- või kahanemisvahemikku.

1) $y = x^2 - 4x + 7$, $x_0 \in \{1; 2; 3\}$;

2) $y = (3x - 2)(x + 3)$, $x_0 \in \{-1; -2; -3\}$;

3) $y = 4x^3 - x^2 - x + 15$, $x_0 \in \{0; -0{,}5; 1\}$;

4) $y = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + 9$, $x_0 \in \{-7; 1; 2\}$;

5) $y = \frac{x-1}{2x-1}$, $x_0 \in \{0; 0{,}5; 1\}$;

6) $y = \cos x \cdot \tan x$, $x \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{3}\right\}$;

7) $y = \frac{\sin x}{\tan x}$, $x_0 \in \left\{-\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right\}$;

8) $y = x \cdot 2^x$, $x_0 \in \{-1; 0; 1\}$.

682. Leidke funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

$\log_a x$, $x > 0$!

1) $y = 2x + 3$;
2) $y = -4x + 3$;
3) $y = x^2 - 2x + 5$;
4) $y = 5x^2 - 3x + 1$;
5) $y = x^3 - 27x$;
6) $y = x^2(x - 3)$;
7) $y = -x^3 + 15x^2 - 75x - 3$;
8) $y = x^3 - 6x^2 + 45x + 3$;
9) $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 6$;
10) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 3$;
11) $y = \log_3 x$;
12) $y = x + \sin x$;
13) $y = x - \cos x$;
14) $y = \tan x$;
15) $y = 2^x$;
16) $y = x - 10 \ln x$;
17) $y = x \cdot e^x$;
18) $y = x \cdot \ln x$;
19) $y = \frac{3x^2}{x+1}$;
20) $y = \frac{5x^2}{2x-1}$;
21) $y = \frac{x^2}{x+1}$;
22) $y = \frac{x^2-1}{2x+1}$.

$\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$!

683. Bakterite arv N teatavas biomassis muutub seaduse $N(t) = 450 - 52t + 2t^2$ järgi (aega mõõdetakse tundides). Millises ajavahemikus bakterite arv väheneb ja millises suureneb?

684. Punkt liigub sirgjooneliselt seaduse $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$ järgi (aega mõõdetakse sekundites, teepikkust meetrites). Millises ajavahemikus on selle punkti liikumise kiirus kasvav, millises kahanev? Kontrollige saadud vastuse õigsust arvutil, kasutades funktsiooni $v(t)$ graafikut.

685. Sirgjooneliselt liikuva keha poolt läbitud tee pikkus avaldub valemiga $s(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 - 4$ (aega mõõdetakse sekundites, teepikkust meetrites). Millises ajavahemikus on selle keha liikumise kiirus kasvav, millises kahanev?

686. Otse üles lastud kuul liigub seaduse $s(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ järgi, kus $s(t)$ on kuuli kaugus lähtepunktist hetkel t, v_0 algkiirus ja g vaba langemise kiirendus (kasutatavad ühikud meeter ja sekund). Leidke ajavahemik pärast tulistamist, mille jooksul kuuli kiirus kahaneb, kui $v_0 = 200\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ja $g = 9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

687. Teatud nakkushaigus levib selliselt, et haigestunute protsent elanike koguarvust $p(t)$ sõltub ajast t (ööpäevades) järgmiselt: $p(t) = 0{,}005(15t^2 - t^3)$, kus $0 \le t \le 15$. Millistel päevadel haigestumise protsent suureneb, millistel väheneb? Millistel päevadel haigestunute protsendi muutumise kiirus kasvab, millistel kahaneb?

B

Näide 3.

Leiame funktsiooni $y=(2x-6)^3$ kasvamisvahemikud.

Et $y'=6(2x-6)^2$, siis tuleb lahendada võrratus $6(2x-6)^2>0$. Antud võrratust rahuldavad kõik reaalarvud välja arvatud arv 3. Seega võime väita, et vaadeldav funktsioon kasvab vahemikes $(-\infty;3)$ ja $(3;\infty)$. Nagu märgitud, võib ka tuletise nullkoht kuuluda funktsiooni kasvamisvahemikku. Antud juhul ongi tegemist sellise olukorraga, sest kohal $x_0=3$ ei lähe funktsiooni $y=(2x-6)^3$ kasvamine üle kahanemiseks ja $y'(3)=0$. Seega kuulub vaadeldava funktsiooni kasvamisvahemikku ka $x_0=3$.

Vastus. Funktsioon $y=(2x-6)^3$ on kasvav kogu oma määramispiirkonnas.

88. Leidke funktsiooni määramispiirkond, kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

1) $y=\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}$; 2) $y=\sqrt{1-x^2}+\frac{x}{2}$.

89. Leidke funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

1) $y=4x+\cos 3x$;
2) $y=-4x+\sin 3x$;
3) $y=(2x-1)^5$;
4) $y=(2x-1)^4$;
5) $y=(x^2-1)^3+x^2$;
6) $y=3(2x+3)^5$;
7) $y=\sqrt{16+6x-x^2}$;
8) $y=\sqrt{4x-x^2}$;
9) $y=x+\ln\cos x$, kus $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$;
10) $y=\sin x+e^{\sin x}$;
11) $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$;
12) $y=\frac{1-\cos x}{\sin x}$.

90. Näidake, et funktsioon $y=e^{2x}-6e^x+5x$ on kasvav kogu oma määramispiirkonnas.

91. Määrake parameetri a väärtused nii, et funktsioon $y=x^3+ax^2+3x$ oleks kogu oma määramispiirkonnas kasvav. Kontrollige saadud vastuse õigsust arvutil, kasutades funktsiooni $y=f(x)$ graafikut.

92. Määrake parameetri a väärtused nii, et funktsioon $y=2x^3+3(a+2)x^2+$ $+6(8a+1)x$ oleks kogu oma määramispiirkonnas kasvav. Kontrollige saadud vastuse õigsust arvutil.

93. Määrake parameetri a väärtused nii, et funktsioon

$y=\frac{2a-5}{3}x^3-2(a-1)x^2+3ax$ oleks kogu oma määramispiirkonnas kahanev.

694. Keha liigub sirgjooneliselt seaduse $s(t)=t^3+6t^2+3at$ järgi. Määrake parameetri a väärtused nii, et keha kaugus lähtekohast oleks kogu aeg kasvav suurus.

695. Keha liigub sirgjooneliselt seaduse $s(t)=\frac{t^3}{3}+(a-4)t^2+(a^2+6a)t$ järgi. Määrake parameetri a väärtused nii, et keha kaugus lähtekohast oleks kogu aeg kasvav suurus.

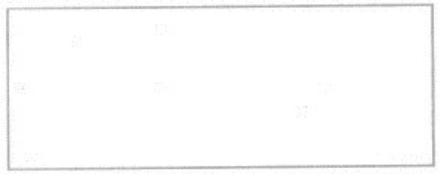
696. Leidke parameetri a väärtused nii, et võrrandil $2x^3-3x^2-12x+a=0$ oleks kolm erinevat reaalarvulist lahendit.

Näpunäide: leidke muutuja x sellised väärtused, mille korral võrrandi vasakul pool oleva funktsiooni kasvamine asendub kahanemisega ja vastupidi. Milliseid tingimusi peavad selle funktsiooni väärtused nendes kohtades rahuldama, et võrrandil oleks kolm erinevat lahendit?

5.5. FUNKTSIOONI EKSTREEMUMID

Lisaks matemaatilistele rakendustele võib tuletis olla tõhusaks abivahendiks ka igapäevaelu probleemide lahendamisel.

697. Peremehel on materjali 200 meetri pikkuse tara ehitamiseks. Ta soovib rajada ristkülikukujulise aia. Kuidas tuleks valida selle aia mõõtmed, et kasutatav pindala tuleks maksimaalne?



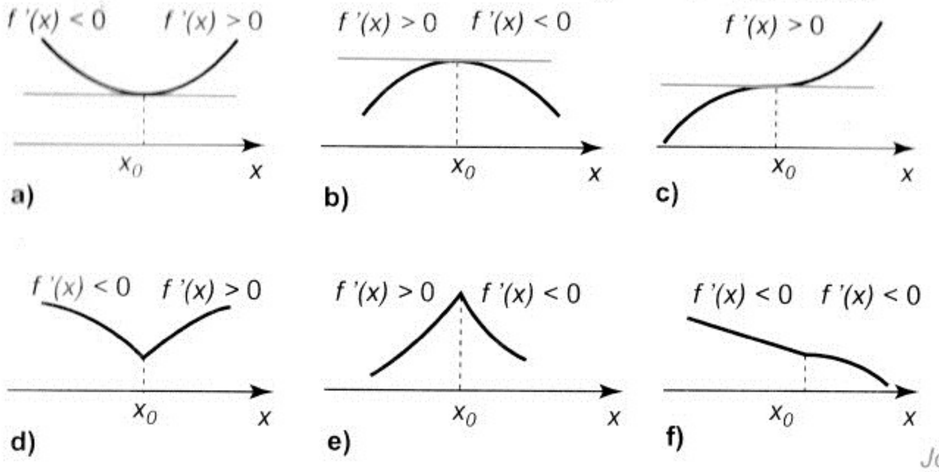
Joon. 5.9

Tähistame aia pikkuse ja pindala vastavalt tähtedega x ja y (joon. 5.9). Et aia laius on sellisel juhul $100-x$, siis avaldub tema pindala y muutuja x funktsioonina järgmiselt: $y=x(100-x)$. Seega taandub antud ülesanne argumendi nende väärtuste leidmisele, mille korral vaadeldav funktsioon omab maksimaalse väärtuse. Kuidas neid aga leida?

NB!
Ekstreemum on ühine nimetus maksimumile ja miinimumile.
Ekstreemum y_e on funktsiooni väärtus.
Ekstreemumkoht x_e on argumendi väärtus.
Ekstreemumpunkt on punkt, mille koordinaadid on ekstreemumkoht ja ekstreemum.

Jooniselt 5.10 (a ja b) näeme, et kui diferentseeruval funktsioonil on kohal x_0 maksimum või miinimum, siis on tema graafiku puutuja sellel kohal paralleelne

x-teljega, s.t. $f'(x_0)=0$. Samas selgub, et tuletis võib olla võrdne nulliga ka kohal, kus funktsioon ei oma ekstreemumit (joon. 5.10c). Seega



Joon. 5.10

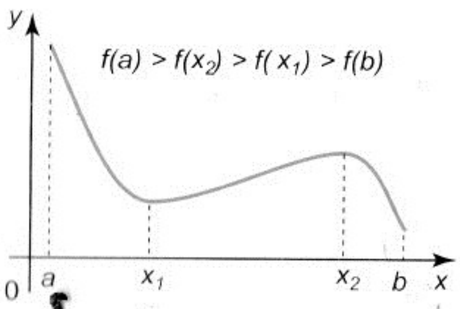
funktsioon $y = f(x)$ võib omada ekstreemumit kohal, kus tema tuletis on võrdne nulliga.

Veel näeme samalt jooniselt (d ja e), et

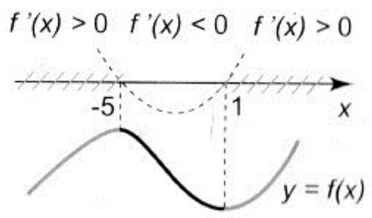
funktsioon $y = f(x)$ võib omada ekstreemumit kohal, kus tal tuletis puudub.

Mis on aga vältimatult vajalik selleks, et tuletise nullkoht või siis argumendi see väärtus, kus tuletis puudub, osutuks funktsiooni ekstreemumkohaks? Jooniselt 5.10 (a, b, d ja e) selgub, et kohal, kus funktsioon omab ekstreemumit, läheb kasvamine alati üle kahanemiseks või vastupidi, s.o. funktsiooni tuletis muudab sellel kohal märki.

Seega funktsiooni $y = f(x)$ ekstreemumkohtade leidmiseks tuleb välja selgitada funktsiooni tuletise nullkohad ja kohad, kus tuletis puudub.
Kui leitud kohal:
funktsiooni tuletis muudab märki, siis on tegemist ekstreemumkohaga. Kui kasvamine läheb seal üle kahanemiseks, on antud koht maksimumkoht, vastasel juhul aga miinimumkoht;
tuletis märki ei muuda, siis funktsioonil pole sellel kohal ekstreemumit.



Joon. 5.11



Joon. 5.12

Sageli on tarvis leida funktsiooni **suurim või vähim väärtus etteantud lõigus**. Taolistel juhtudel tuleb silmas pidada lisaks eeltoodule veel seda, et lõigus määratud funktsioon võib omandada ekstremaalse väärtuse ka lõigu otspunktides (joon. 5.11).

Seega juhul, kui funktsiooni ekstreemumit otsitakse mingis lõigus, tuleb lisaks eespool märgitud argumendi väärtustele vaatluse alla võtta ka vaadeldava lõigu otspunktid. Kõigi selliselt saadud argumendi väärtuste korral arvutatakse vastavad funktsiooni väärtused ning viimaste seast leitakse vastavalt vajadusele kas suurim või vähim.

Näide 1.

Leiame funktsiooni $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 1$ ekstreemumid.

Leiame esmalt funktsiooni kõik ekstreemumkohad vahemikust $(-\infty; \infty)$. Et vaadeldav funktsioon on selles vahemikus diferentseeruv, siis võivad tema ekstreemumid olla vaid tuletise nullkohtades. Võrrandist

$(x^3 + 6x^2 - 15x + 1)' = 0$ saame, et $x^2 + 4x - 5 = 0$ ja $x_1 = -5$ ning $x_2 = 1$.

Skitseerides tuletise märgi muutused joonisel (joon. 5.12) näeme, et funktsioonil $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 1$ on kohal $x_1 = -5$ maksimum ning kohal $x_2 = 1$ miinimum.

Leiame lõpuks funktsiooni ekstreemumid, s.o. $y(-5)$ ja $y(1)$.

$y(-5) = (-5)^3 + 6 \cdot (-5)^2 - 15 \cdot (-5) + 1 = 101,$

$y(1) = 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 15 \cdot 1 + 1 = -7.$

Vastus. Funktsioonil $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 1$ on kohal $x_1 = -5$ maksimum $y_1 = 101$ ja kohal $x_2 = 1$ miinimum $y_2 = -7$.

Näide 2.

Leiame funktsiooni $y = x^2 - 8x + 15$ suurima ja vähima väärtuse lõigus $[2; 7]$.

Ekstreemumkohti otsime nüüd funktsiooni tuletise nullkohtades ja antud lõigu otspunktides. Lahendame esmalt võrrandi $y' = 0$. Võrrandist

$2x - 8 = 0$ saame, et $x = 4$.

Kontrollime nüüd, kas argumendi saadud väärtus kuulub lõiku $[2; 7]$. Vastus on jaatav. Eitava vastuse korral jääks see väärtus edasiste vaatluste alt välja. Leiame seejärel funktsiooni väärtused tuletise nullkohas ja lõigu $[2; 7]$ otspunktides. Et $y(4) = -1$, $y(2) = 3$ ja $y(7) = 8$, siis on funktsiooni suurim ja vähim väärtus antud lõigus vastavalt 8 ja -1.

Vastus. Funktsioon $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 1$ suurim ja vähim väärtus lõigus $[2; 7]$ on vastavalt 8 ja -1.

Näide 3.

Lahendame lõpuni ülesande 697.

Antud juhul otsime ekstreemumkohta funktsiooni $y = x(100 - x)$ tuletise nullkohtadest. Selleks lahendame võrrandi $y' = 0$.

Võrrandist

$(100x - x^2)' = 0$ saame, et

$100 - 2x = 0$ ja $x = 50$.

Et funktsioon $y = x(100 - x)$ on $x < 50$ korral kasvav (y' on siis positiivne) ja $x > 50$ korral kahanev ($y' < 0$), siis on tal sellel kohal maksimum. Siit näemegi, et vaadeldav funktsioon omab maksimumi kohal $x = 50$.

Vastus. Aed tuleb teha 50 m pikkuse küljega ruudu kujuline.

A

698. Leidke funktsiooni ekstreemumkohad ja ekstreemumid. Selgitage ekstreemumi liik.

1) $y = 2x^2 - 5x - 12$;
2) $y = -3x^2 + x - 5$;
3) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$;
4 $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 24$;
5) $y = x^4 - 2x^2 - 5$;
6) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$;
7) $y = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$;
8) $y = 2\cos^2\frac{x}{2}$;
9) $y = x^2 + \ln x$;
10) $y = x^3 + 6\ln x$;
11) $y = x^2 e^x$;
12) $y = x^2 \ln x$.

$y = \ln x, \quad x > 0$

699. Leidke funktsiooni kõik ekstreemumid antud lõigus.

1) $y = x^4 - 32x + 8$, kui $x \in [-1; 3]$;
2) $y = 3x^5 - 5x^3 + 3$, kui $x \in [-3; 3]$;
3) $y = \frac{x^2 + 4}{x}$, kui $x \in [1; 4]$;
4) $y = \sin x \cos x$, kui $x \in [0{,}5\pi; \pi]$;

700. Leidke funktsiooni suurim ja vähim väärtus antud lõigus. Kontrollige saadud vastuse õigsust arvutil, kasutades funktsiooni $y = f(x)$ graafikut.

1) $y = 1 - x + 2x^2 - x^3$, kui $x \in [0; 4]$;
2) $y = -x^4 + 2x^2 - 1$, kui $x \in [-2; 1]$;

701. Auto bensiinikulu 100 km kohta liitrites l sõltub sõidukiirusest järgmiselt: $l = 0{,}0015v^2 - 0{,}12v + 10$. Millise kiirusega tuleks sõita, et bensiinikulu oleks minimaalne?

702. Teatud nakkushaigus levib selliselt, et haigestunute protsent elanike koguarvust $p(t)$ sõltub ajast t (ööpäevades) järgmiselt:

$p(t) = 0{,}005(15t^2 - t^3)$, kus $0 \le t \le 15$.

Mitmendal ööpäeval saavutab nakkus maksimumi? Mitu protsenti elanikest on sellel päeval haigestunud?

703. Nõudlus teatud toote järele muutub vastavalt seadusele $N(t) = 100 + 5t^2 - \frac{t^3}{3}$, kus $N(t)$ on toodet nõudvate inimeste arv t-ndal päeval. Mitmendal päeval on nõudlus selle toote järele suurim ja kui suur see siis on?

704. Punkt liigub mööda sirget vastavalt seadusele $s(t) = 12t^2 - \frac{2}{3}t^3$ (mõõtühikud on meeter ja sekund). Leidke piirkonnas [4; 10] hetk, millal selle punkti liikumise kiirus on suurim.

B

Näide 4.

Leiame funktsiooni $y = x^2 - 2|x|$ kõik ekstreemumid lõigus [–3; 4].

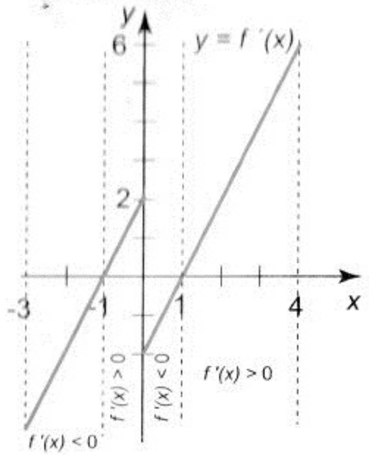
Antud funktsiooni võime esitada kujul

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{kui } -3 \le x < 0 \\ x^2 - 2x, & \text{kui } 0 \le x \le 4, \end{cases}$$ millest

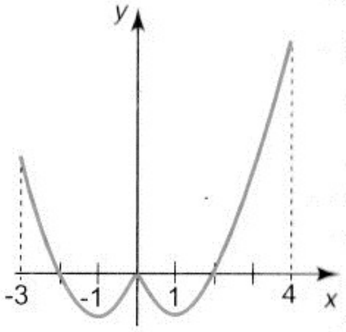
$$y' = \begin{cases} 2x + 2, & \text{kui } -3 < x < 0 \\ 2x - 2, & \text{kui } 0 < x < 4. \end{cases}$$

Et funktsioon $y = x^2 - 2|x|$ on pidev lõigus [–3; 4] ja tal puudub tuletis koh $x = 0$ (tuletisfunktsioon on sellel kohal katkev, vt. joon. 5.13), siis otsim ekstreemumkohti tuletise nullkohtades, lõigu [–3; 4] otspunktides ja kohal, ku funktsioonil tuletis puudub. Seega $x_e \in \{-3; -1; 0; 1; 4\}$. Jälgides funktsioo tuletise märgimuutusi ja funktsiooni väärtusi võimalikes ekstreemumkohtade (joonised 5.13 ja 5.14) saame, et vaadeldav funktsioon omab maksimun kohtadel $x_1 = -3$, $x_2 = 0$ ja $x_3 = 4$ ning miinimumi kohtadel $x_{4;5} = \pm 1$. Seeg maksimumid on $y(-3) = 3$, $y(0) = 0$, $y(4) = 8$ ja miinimumid on $y(\pm 1) = -1$.

Vastus. Funktsioonil $y = x^2 - 2|x|$ on lõigus [–3; 4] kolm maksimumi 3; 0 j 8 ning kaks miinimumi, kumbki –1.



Joon. 5.13



Joon. 5.14

705. Leidke funktsiooni suurim ja vähim väärtus antud lõigus.

1) $y = x^2 - |x|$, kui $x \in [-2; 3]$;
2) $y = |x| - 0{,}5x^2$, kui $x \in [-3; 4]$;
3) $y = x|x+1|$, kui $x \in [-2; 3]$;
4) $y = |x^2 - 1|$, kui $x \in [-3; 2]$.

706. Leidke parameetri a selline väärtus, mille korral funktsioonil $y = x^2 + ax + b$ on kohal $x = -1$ ekstreemum.

707. Leidke parameetrite a ja b sellised väärtused, mille korral $y(1) = 3$ on funktsiooni $y = x^2 + ax + b$ miinimumiks.

708. Leidke parameetrite a ja b sellised väärtused, mille korral parabooli $y = -x^2 + ax + b$ haripunkt asub punktis $(-1; -1)$. Kontrollige saadud vastuse õigsust arvutil, kasutades funktsiooni $y = f(x)$ graafikut.

709. Leidke parameetri a sellised väärtused, mille korral funktsioonil $y = 2x^3 + ax^2 + ax$ eksisteerivad ekstreemumid.

5.6. * EKSTREEMUMI LIIK JA FUNKTSIOONI TEINE TULETIS

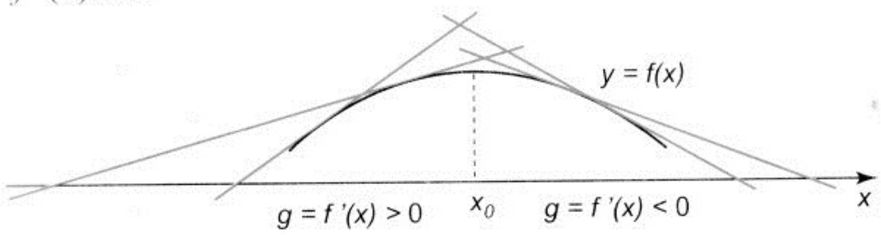
Olgu funktsioon $y = f(x)$ kohal x_0 diferentseeruv ja olgu tal seal ekstreemum, s.t. $f'(x_0) = 0$. Uurime nüüd, kuidas saab tuletise abil selgitada, kas kohal x_0 on funktsioonil maksimum või miinimum. Ühte sellist võimalust me juba teame:

kui funktsiooni tuletis on enne ekstreemumkohta positiivne, pärast aga negatiivne, siis on tegemist maksimumiga, kui vastupidi, siis miinimumiga.

See meetod laseb ennast aga oluliselt lihtsustada, kui kasutada funktsiooni teist tuletist. Me teame, et funktsiooni $y = f(x)$ tuletis on ka ise mingi funktsioon $g(x)$, s.t. $g(x) = f'(x)$. Ka see uus funktsioon võib omada tuletist $g'(x) = [f'(x)]'$. Viimast nimetataksegi funktsiooni $y = f(x)$ teiseks tuletiseks ja tähistatakse sümboliga y'' või $f''(x)$. Seega

$f''(x) = [f'(x)]'$, või $y'' = (y')'$.

Olgu funktsioon $y = f(x)$ kohal x_0 kaks korda diferentseeruv, s.t. see funktsioon omab sellel kohal teist tuletist $f''(x_0)$. Olgu funktsioonil $y = f(x)$ kohal x_0 maksimum (joon. 5.15). Uurime nüüd funktsiooni $y = f(x)$ tuletisfunktsiooni käitumist maksimumkoha ümbruses. Küsime, kas tuletisfunktsioon $g(x) = f'(x)$ on seal kasvav või kahanev? Jooniselt 5.15 näeme, et liikudes koha x_0 ümbruses vasakult paremale funktsiooni $y = f(x)$ graafiku puutuja tõusunurk ja seega ka puutuja tõus $f'(x)$ kahanevad. Tuletisfunktsioon on kahanev ka üleminekul maksimumkohast x_0, sest enne seda omab ta positiivseid, pärast aga negatiivseid väärtusi. Saime, et funktsiooni $y = f(x)$ tuletisfunktsioon $g(x)$ on koha x_0 ümbruses kahanev. Sellisel juhul aga tuletisfunktsiooni $g(x) = f'(x)$ tuletis kohal x_0 kas puudub, on negatiivne või null (vt. art. 5.4). Seega juhul, kui funktsioon $f(x)$ on kohal x_0 kaks korda diferentseeruv, saame siit, et maksimumkohal on selle funktsiooni tuletise tuletis $f''(x) \le 0$.



Joon. 5.15

Kasutades funktsiooni teise tuletise mõistet võime eelneva kokku võtta järgmiselt:

kui kohal x_0 kaks korda diferentseeruval funktsioonil $y = f(x)$ on sellel kohal maksimum, siis $f''(x_0) \le 0$.

710. Uurige funktsiooni $y = f(x)$ tuletisfunktsiooni käitumist miinimumkoha ümbruses.

1. Milline on tuletisfunktsiooni märk enne ja pärast miinimumkohta?
2. Kas tuletisfunktsioon on miinimumkohal kasvav või kahanev?
3. Millist tingimust peab rahuldama tuletisfunktsiooni tuletis miinimumkohal?

Eelnevas ülesandes selgus, et

kui kohal x_0 kaks korda diferentseeruval funktsioonil $y = f(x)$ on sellel kohal miinimum, siis $f''(x_0) \geq 0$.

Küsime nüüd, kas kehtivad ka esitatud väidete pöördväited, s.t. kas alati siis, kui $f''(x_0) \geq 0$ $(f''(x_0) \leq 0)$, on funktsioonil $f(x)$ kohal x_0 miinimum (maksimum)? Selgub, et pöördväited kehtivad vaid rangete võrratuste korral. Artiklis 5.7 näeme, et leidub ka olukordi, kus funktsiooni teise tuletise võrdumine nulliga mingil kohal ei tähenda veel ekstreemumi olemasolu sellel kohal.
Seega

kui $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) < 0$, siis on x_0 funktsiooni $y = f(x)$ maksimumkoht.
kui $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) > 0$, siis on x_0 funktsiooni $y = f(x)$ miinimumkoht.

Näide 1.

Leiame funktsiooni $y = x - \ln x$ ekstreemumi ja määrame selle liigi.

Lahendame selleks esmalt võrrandi $y' = 0$. Et $y' = 1 - \frac{1}{x}$, siis saame võrrandi

$1 - \frac{1}{x} = 0$, millest $x = 1$.

Seega vaadeldava funktsiooni ekstreemum võib olla kohal $x = 1$. Arvutame $y''(1)$. Et $y'' = \frac{1}{x^2}$, siis $y''(1) = 1$. Kuna $y''(1) > 0$, siis on vaadeldaval funktsioonil kohal $x = 1$ miinimum.

Lõpuks leiame funktsiooni $y = x - \ln x$ miinimumi, s.o. tema väärtuse miinimumkohal.

$y(1) = 1' - \ln 1 = 1$.

Vastus. Funktsioonil $y = x - \ln x$ on kohal $x = 1$ miinimum $y = 1$.

Näide 2.

Leiame funktsiooni $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ kasvamis- ja kahanemisvahemikud, ekstreemumpunktid ning skitseerime funktsiooni graafiku.

Võimalike ekstreemumkohtade leidmiseks avaldame funktsiooni tuletise ja lahendame võrrandi $y' = 0$.

$y' = 3x^2 + 6x - 9$.

Võrrandist $3x^2 + 6x - 9 = 0$ saame, et $x_1 = -3$ ja $x_2 = 1$.

Arvutame funktsiooni teise tuletise.

$y'' = 6x + 6$.

Et $y''(-3) < 0$ ja $y''(1) > 0$, siis on vaadeldaval funktsioonil kohal $x_1 = -3$ maksimum ja kohal $x_2 = 1$ miinimum.

Arvutame nüüd funktsiooni väärtused ekstreemumkohtadel.

$y(-3) = -27 + 27 + 27 + 1 = 28$ ja $y(1) = 1 + 3 - 9 + 1 = -4$.

Kasvamisvahemike leidmiseks lahendame võrratuse $3x^2 + 6x - 9 > 0$ ja saame, et $X_1 \uparrow = (-\infty; -3)$ ning $X_2 \uparrow = (1; \infty)$.

Kahanemisvahemiku leiame võrratusest $3x^2 + 6x - 9 < 0$. Saame, et $X \downarrow = (-3; 1)$.

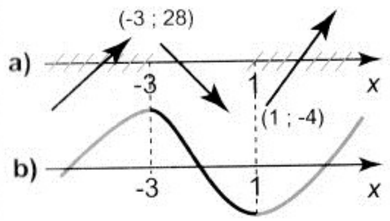
Funktsiooni graafiku skitseerimiseks kanname teljestikku ekstreemumpunktid ning funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud (joon. 5.16a).

Et selgitada, mitmes kohas antud funktsiooni graafik lõikab x-telge, leiame veel, et

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 + 3x^2 - 9x + 1) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty \text{ ja}$$

$$\lim_{x \to \infty} (x^3 + 3x^2 - 9x + 1) = \lim_{x \to \infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \infty.$$

Siit näeme, et funktsioonil $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ on nullkohad ka vahemikes $(-\infty; -3)$ ja $(1; \infty)$. Seega võime otsitava graafiku skitseerida joonisel 5.16b näidatud kujul.



Joon. 5.16

711. Leidke funktsiooni teine tuletis.

1) $y = 3x + 2$;
2) $y = -x + 5$;
3) $y = 2x^3 - 4x^2 + 7$;
4) $y = -5x^3 + 2x - 3$;
5) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} + x$;
6) $y = \frac{3}{x^3} - \sqrt[3]{x}$;
7) $y = \sin x + 3\cos x$;
8) $y = 2x - \cos x$;
9) $y = (1 + \cos x)(1 - \cos x)$;
10) $y = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$;
11) $y = x^2 \cos x$;
12) $y = x^3 \sin x$;
13) $y = e^{-x} + \ln x$;
14) $y = \log_a x$.

712. Leidke keha liikumise kiirus ja kiirendus hetkel t_0, kui

1) $s(t)=t^2-3t+2$ ja $t_0=3$;
2) $s(t)=10t^2+3t-5$ ja $t_0=5$;
3) $s(t)=t^3+10t^2+5t-2$ ja $t_0=2$;
4) $s(t)=-2t^3+3t^2+125$ ja $t_0=6$.

713. Leidke funktsiooni estreemumkohad ja määrake ekstreemumi liik.

1) $y=x^2+x+1$;
2) $y=2x-2x^2$;
3) $y=x^3+3x^2+3x+1$;
4) $y=(1-x)^3$;
5) $y=x^2-2\ln x$;
6) $y=3\ln x-x^3$.

714. Leidke funktsiooni ekstreemumpunktid ja määrake ekstreemumi liik. Kontrollige vastuse õigsust arvutil, kasutades antud funktsiooni graafikut.

1) $y=x^3-3x^2-5$;
2) $y=2x^3-6x^2-18x+7$;
3) $y=x(1-x^2)$;
4) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$;
5) $y=x^2\ln x$;
6) $y=2x\ln x$.

715. Leidke funktsiooni ekstreemumpunktid, kasvamis- ja kahanemisvahemikud ning skitseerige funktsiooni graafik. Mitu nullkohta on funktsioonil?

1) $y=x^3-6x^2+9x-3$;
2) $y=x^3-12x+3$;
3) $y=x^4-4x+8$;
4) $y=-x^4+32x+4$;
5) $y=9-9x-6x^2-x^3$;
6) $y=1+12x+3x^2-2x^3$.

716. Leidke funktsiooni ekstreemumpunktid ja määrake ekstreemumi liik.

1) $y=\sqrt{x^2-6x+5}$;
2) $y=\sqrt{(x+1)^2+(x-1)^2}$;
3) $y=e^{2x-x^2}$;
4) $y=\ln(x^2+3x)$.

717. Leidke funktsiooni ekstreemumpunktid, kasvamis- ja kahanemisvahemikud ning skitseerige funktsiooni graafik. Mitu nullkohta on funktsioonil?

1) $y=x^4-2x^2-5$;
2) $y=x^4-8x^2+1$;
3) $y=3x^4-4x^3+6x^2-12x+1$;
4) $y=x^4+32x-8$.

718. Näidake, et võrrandil $x^3-3x+1=0$ on kolm erinevat reaalarvulist lahendit.

719. Mitu erinevat reaalarvulist lahendit on antud võrrandil?

1) $4x^3-3x^2-36x-10=0$;
2) $\dfrac{x^4}{4}-x^3-\dfrac{x^2}{2}+3x=0$.

Näide 3.

Leiame parameetri a väärtused, mille korral võrrandil $x^3+3x^2-9x-a=0$ on kolm erinevat reaalarvulist lahendit.

Võrrandil $x^3+3x^2-9x-a=0$ on sama palju lahendeid, kui on funktsioonil $y=x^3+3x^2-9x-a$ nullkohti. Seega peame leidma parameetrile a sellised tingimused, mille korral funktsioonil $y=x^3+3x^2-9x-a$ on 3 nullkohta. Vaadeldav funktsioon on pidev ja $y'=3x^2+6x-9$.

Lahendades võrrandi $3x^2+6x-9=0$ saame, et funktsioonil võivad ekstreemumkohad olla kohtadel $x_1=-3$ ja $x_2=1$.

Et $y''=6x+6$, siis $y''(-3)=-12$ ja $y''(1)=12$.

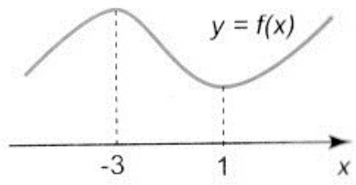
Seega vaadeldaval funktsioonil on kohal $x_1=-3$ maksimum ning kohal $x_2=1$ miinimum.

Arvestades saadut võime skitseerida funktsiooni $y=x^3+3x^2-9x-a$ graafiku joonisel 5.17 näidatud kujul. Jooniselt näeme, et antud funktsioonil võib olla kolm nullkohta vaid juhul, kui on täidetud kaks tingimust:

$y(-3)>0$ ja $y(1)<0$.

Vastavast võrratusesüsteemist saame, et

$$\begin{cases} a<27 \\ a>-5. \end{cases}$$



Joon. 5.17

Lõpuks jääb veel kontrollida, kas leitud a väärtuste korral funktsiooni graafik lõikab x-telge ka vahemikes $(-\infty;-3)$ ja $(1;\infty)$. Et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3x^2-9x+27)=-\infty$ ja $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+3x^2-9x-5)=\infty$, siis nii see ka on.

Vastus. Võrrandil $x^3+3x^2-9x-a=0$ on kolm erinevat reaalarvulist lahendit, kui $a\in(-5;27)$.

720. Leidke parameetri a sellised väärtused, mille korral võrrandil $x^3-3x^2-24x+a=0$ on kolm erinevat reaalarvulist lahendit.

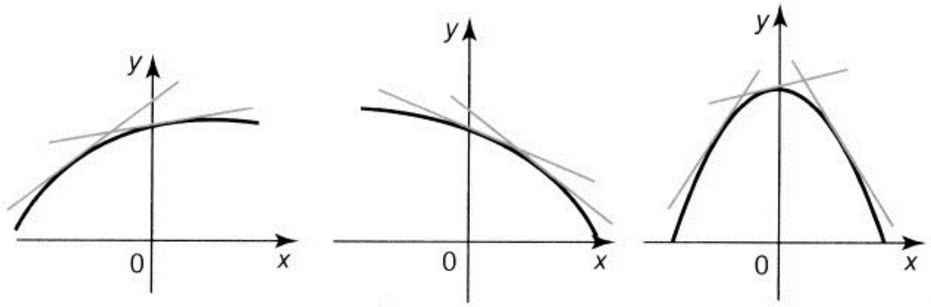
721. Leidke võrrandi $3x^4+4x^3-12x^2+a=0$ reaalarvuliste lahendite arv parameetri a erinevate väärtuste korral.

722. Leidke parameetri a selline positiivne väärtus, mille korral võrrandil $2x^3-3ax^2+1=0$ on täpselt kaks erinevat reaalarvulist lahendit.

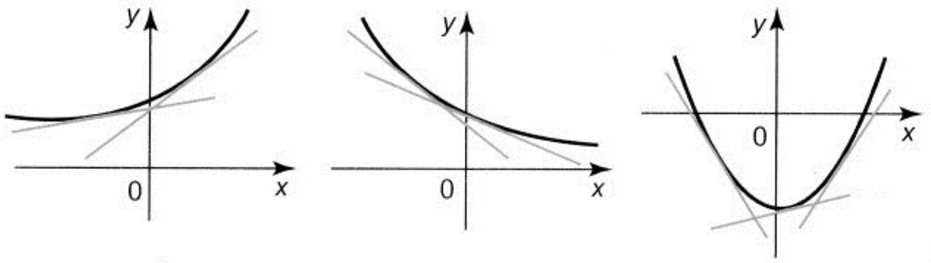
5.7. * FUNKTSIOONI GRAAFIKU KUMERUS JA NÕGUSUS. GRAAFIKU KÄÄNUPUNKTID

Teise tuletise abil saame veel lisateavet funktsiooni graafiku kohta. Jooniselt 5.18 näeme, et kõigi seal esitatud graafikute punktid asuvad graafikule joonestatud puutujatest allpool.

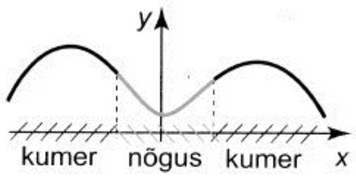
Graafikuid, mille kõik punktid asuvad graafikule joonestatud puutujatest allpool, nimetatakse kumerateks.
Graafikuid, mille kõik punktid asuvad graafiku puutujatest ülalpool, nimetatakse nõgusateks (joon. 5.19).



Joon. 5.18



Joon. 5.19



Joon. 5.20

Joonisel 5.20 on esitatud niisugused funktsioonide graafikud, mis ühes x-telje vahemikus on kumerad ja teises nõgusad. Selliseid vahemikke nimetatakse vastavalt **funktsiooni graafiku kumerus- ja nõgususvahemikeks** ning tähistatakse sümbolitega $\cap$ ja $\cup$.

Teeme nüüd tuletise mõiste abil kindlaks tingimused, mis võimaldavad leida graafiku kumerus- ja nõgususvahemikke. Joonisel 5.21 esitatud graafik on kumer. Et

$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 = 0$, siis $\tan\alpha_1 > \tan\alpha_2 > \tan\alpha_3 = 0$.

Kuna funktsiooni tuletis kohal x on võrdne sellel kohal funktsiooni graafikule joonestatud puutuja tõusunurga tangensiga, siis näeme siit, et funktsiooni $y = f(x)$ tuletisfunktsiooni $g(x)$ väärtused argumendi kasvades kahanevad. Seega funktsiooni $y = f(x)$ tuletisfunktsioon $g(x) = f'(x)$ on vahemikus $(-\infty; x_3)$ kahanev. Et funktsioon $g(x)$ on kahanev, siis on tema tuletis $g'(x) = [f'(x)]' = y''$ selles vahemikus negatiivne või null, s.t. $y'' \le 0$. Samalt jooniselt näeme, et tõusunurgad vähenevad ka vahemikus $(x_3; \infty)$:

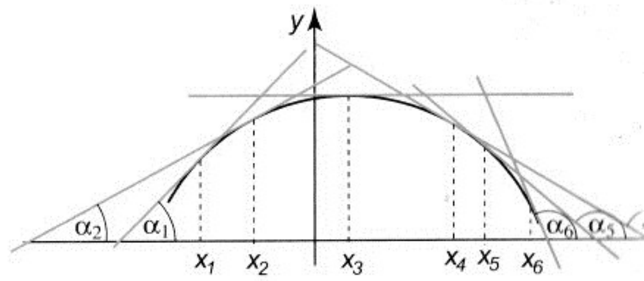
$\alpha_4 > \alpha_5 > \alpha_6$.

Et vaadeldavad nurgad on teise veerandi nurgad ja tangensfunktsioon on oma määramispiirkonnas kasvav, siis

$0 = \tan\alpha_3 > \tan\alpha_4 > \tan\alpha_5 > \tan\alpha_6$.

Seega ka vahemikus $(x_3; \infty)$ on funktsiooni $y = f(x)$ tuletisfunktsioon $g(x)$ kahanev, s.t. $g'(x) \le 0$ ehk $y'' \le 0$.

Sarnaselt saame, et funktsiooni nõgususvahemikus on $y'' \ge 0$.



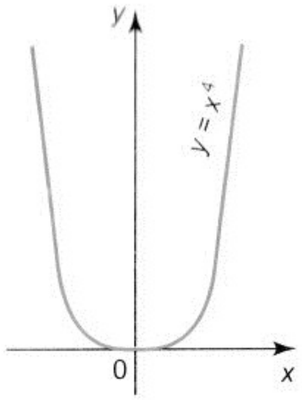
Joon. 5.2

Ka funktsiooni teise tuletise nullkoht võib kuuluda graafiku kumerus- ja nõgususvahemikku (joon. 5.22). Seda sel juhul, kui graafiku kumerus ei asendu sellel kohal nõgususega või vastupidi.
Võtame kokku eelneva.

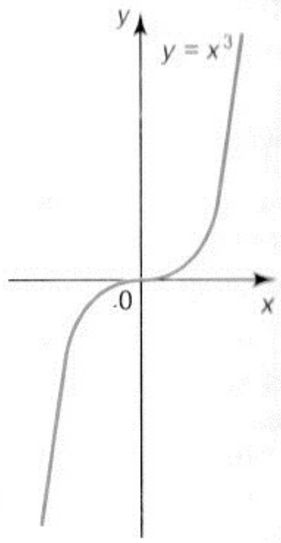
Kui x_0 kuulub funktsiooni $y = f(x)$ graafiku kumerusvahemikku, siis $f''(x) \le 0$.
Kui x_0 kuulub funktsiooni $y = f(x)$ graafiku nõgususvahemikku, siis $f''(x) \ge 0$.

Vastavad pöördlaused kehtivad vaid range võrratuse korral. Kui oletada, et nad kehtivad ka mitterange võrratuse korral, siis peaks näiteks funktsiooni $y = x$ graafiku punkt (0; 0) kuuluma nii graafiku kumerus- kui ka nõgususvahemikku. On ju $f''(0) = 0$. Tegelikult aga, nagu näeme, toimub sellel kohal üleminek graafiku kumerusvahemikust nõgususvahemikku (joon. 5.23).

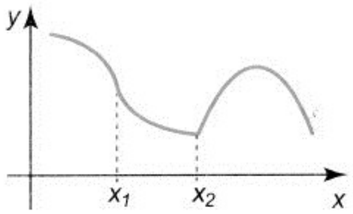
Niisiis funktsiooni kumerusvahemike leidmiseks tuleb lahendada võrratus $f''(x) < 0$, nõgususvahemike leidmiseks aga võrratus $f''(x) > 0$. Lisaks kuuluvad graafiku kumerus- või nõgususvahemikku veel funktsiooni teise tuletise need nullkohad, kus teine tuletis ei muuda märki.



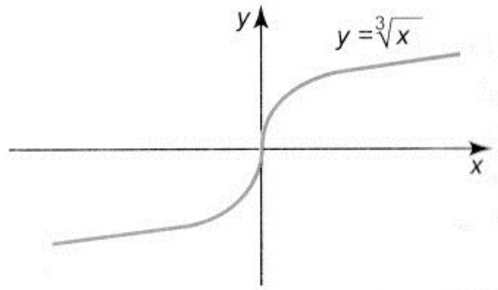
Joon. 5.22



Joon. 5.23



Joon. 5.24



Joon. 5.25

Kohad, kus aga selline märgimuutus toimub, s.t. kus graafiku kumerus asendub nõgususega või vastupidi, kannavad nimetust graafiku **käänupunktid**.

Graafiku selliseid punkte, kus on olemas puutuja ja kus graafiku kumerus asendub nõgususega või vastupidi, nimetatakse käänupunktideks. Nende punktide abstsisse nimetatakse funktsiooni graafiku käänukohtadeks.

Käänukohtade hulka tähistame sümboliga X_k.

Näiteks joonisel 5.24 on kohal x_1 käänupunkt, kuna sellel kohal on funktsiooni graafikul puutuja ja graafiku kumerus läheb seal üle nõgususeks. Kohal x_2 toimub samuti teise tuletise märgimuutus: nõgusus asendub seal kumerusega. Kuna aga sellel kohal puudub funktsiooni graafikul puutuja, siis pole seal ka graafiku käänupunkti.

Leiame nüüd graafiku käänukoha olemasolu piisava tingimuse. Olgu funktsioon $y = f(x)$ kohta x_0 sisaldavas vahemikus kaks korda diferentseeruv. Kui funktsiooni teine tuletis muudab kohal x_0 märki, tähendabki see seda, et sellel kohal funktsiooni graafiku kumerus läheb üle nõgususeks või vastupidi. Lisaks

sellele, eeldusel, et funktsioon on kaks korda diferentseeruv vaadeldavas vahemikus, omab ta seal ka esimest tuletist. Järelikult funktsiooni $y = f(x)$ graafikul on kohal x_0 ka puutuja. Seega on funktsiooni graafikul kohal x_0 käänupunkt. Teiselt poolt teise tuletise märgimuutus kohal x_0 tähendab seda, et esimese tuletise kasvamine läheb üle seal kahanemiseks või vastupidi. Seega on kohal x_0 funktsiooni esimesel tuletisel kui funktsioonil kas maksimum või miinimum. Järelikult peab sellel kohal funktsiooni tuletise tuletis võrduma nulliga, seega $f''(x) = 0$. Niisiis,

kui $f''(x_0) = 0$ ja funktsiooni teine tuletis muudab kohal x_0 märki, siis on funktsiooni graafikul kohal x_0 käänupunkt.

Märkus. Leidub ka selliseid käänukohti, kus funktsiooni teine tuletis ei ole null. Näiteks funktsiooni $y = \sqrt[3]{x}$ graafikul on kohal $x_0 = 0$ käänupunkt, kuid sellel kohal pole antud funktsioonil ei esimest ega ka teist tuletist (joon. 5.25). Selliste funktsioonide detailsem käsitlus ei kuulu kooliprogrammi.

Näide 1.

Leiame funktsiooni $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 5$ käänukohad ning kumerus- ja nõgususvahemikud.

Avaldame selleks esmalt funktsiooni esimese ja teise tuletise.

$y' = 4x^3 - 24x^2 + 36x$ ja $y'' = 12x^2 - 48x + 36$.

Edasi leiame teise tuletise nullkohad. Võrrandist

$12x^2 - 48x + 36 = 0$

saame, et vaadeldava funktsiooni graafikul võivad käänupunktid olla kohtadel $x_1 = 3$ ja $x_2 = 1$.

Kumerus- ja nõgususvahemikud leiame vastavalt võrratustest

$12x^2 - 48x + 36 < 0$ ja $12x^2 - 48x + 36 > 0$.

Saame, et antud funktsioonil on üks kumerusvahemik $\breve{X} = (1; 3)$ ja kaks nõgususvahemikku $\breve{X}_1 = (-\infty; 1)$ ja $\breve{X}_2 = (3; \infty)$.

Et teise tuletise nullkohtadel teine tuletis muudab märki, siis on seal käänukohad: $X_k = \{1; 3\}$.

Vastus. Funktsiooni $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 5$ graafikul on kaks käänukohta $x_1 = 3$ ja $x_2 = 1$, üks kumerusvahemik $\breve{X} = (1; 3)$ ja kaks nõgususvahemikku $\breve{X} = (-\infty; 1)$ ja $\breve{X}_2 = (3; \infty)$.

723. Leidke funktsiooni $y = f(x)$ graafiku kumerus- ja nõgususvahemikud.

1) $y = x^2 + 7x$; 2) $y = 2^x$; 3) $y = \log x$; 4) $y = \cos x$.

724. Uurige funktsiooni $y = f(x)$ graafiku kumerust ja nõgusust sõltuvalt parameetri a väärtusest.

1) $y = ax^2 + bx + c$, kui $a > 0$, kui $a < 0$;

2) $y = \frac{a}{x}$, kui $a > 0$, kui $a < 0$;

3) $y = a^x$, kui $a > 0$;

4) $y = a \cdot e^x$, kui $a > 0$, kui $a < 0$;

5) $y = a \ln x$, kui $a > 0$, kui $a < 0$;

6) $y = a \sin x$, kui $a > 0$, kui $a < 0$.

725. Leidke funktsiooni graafiku käänukohad ning kumerus- ja nõgususvahemikud.

1) $y = x^4 - 24x^2 + 12$;

2) $y = x^4 + 4x^3 - 12$;

3) $y = -x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 6$;

4) $y = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 6$;

5) $y = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$;

6) $y = -x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 32x - 16$;

7) $y = -x^4 - 12x^2 + 24$;

8) $y = x^4 + 4x^2 + 1$;

9) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$;

10) $y = 8 - 12x + 6x^2 - x^3$;

11) $y = x^3 - 6 \ln x$;

12) $y = 48 \ln x + x^4$;

13) $y = x^2 + 2 \sin x$;

14) $y = -x + \cos x$.

726. Leidke funktsiooni ekstreemumkohad, kasvamis- ja kahanemisvahemikud, graafiku käänukohad ning kumerus- ja nõgususvahemikud. Skitseerige funktsiooni graafik. Mitu nullkohta on funktsioonil?

1) $y = x^3 - 27x$;

2) $y = 2x^3 - 24x$;

3) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$;

4) $y = x^3 + 3x^2 - 24x + 24$;

5) $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$;

6) $y = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

727. Leidke funktsiooni ekstreemumkohad, kasvamis- ja kahanemisvahemikud, graafiku käänukohad ning kumerus- ja nõgususvahemikud. Skitseerige funktsiooni graafik. Mitu nullkohta on funktsioonil?

1) $y = 3x^5 - 5x^3 + 2$;

2) $y = 3x^5 - 40x^3 + 80$;

3) $y = 3 \cdot \sqrt[3]{x^5} - 15 \cdot \sqrt[3]{x^2}$;

4) $y = 2 \cdot \sqrt[3]{x^4} - 4 \cdot \sqrt[3]{x}$;

5) $y = x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}$;

6) $y = x^{\frac{1}{3}}(x + 4)$.

728. Punkt A liigub mööda sirget vastavalt seadusele $s(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t$, kus $s(t)$ on punkti kaugus lähtepunktist t-nda sekundi lõpul sentimeetrites ja $t \geq 0$. Kirjeldage selle punkti liikumist, toetudes järgnevatele küsimustele.

1. Kui kaugel lähtekohast on punkt A esimese sekundi lõpul?

2. Millisest hetkest alates hakkab vaadeldav punkt taas lähenema lähtepunktile? Kui suur on sellel hetkel punkti kiirus ja kaugus lähtepunktist?
3. Millise minimaalse kauguse lähtepunktist ja mis hetkel saavutab punkt A ajavahemikul $(2; 7)$?
4. Milline peaks olema valemis $s(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + a$ parameetri a väärtus, et punkt jõuaks lähenedes lähtepunkti?
5. Millistes ajavahemikes punkt A kaugeneb lähtepunktist, millistes läheneb?
6. Skitseerige graafik, mis kirjeldab punkti A ja lähtepunkti vahelise kaugust $s(t)$ muutumist sõltuvalt ajast t.
7. Millistel hetkedel on punkti liikumise kiirus 0 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$?
8. Millises ajavahemikus punkti kiirus väheneb, millises suureneb?
9. Millises ajavahemikus on punkti kiirus negatiivne? Mida tähendab sisuliselt negatiivne kiirus?
10. Kui suure maksimaalse kiiruse saavutab punkt tagasiliikumisel?
11. Skitseerige graafik, mis kirjeldab punkti A liikumise kiiruse $v(t)$ sõltuvust ajast t.
12. Millisel hetkel on punkti liikumise kiirendus 0 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$?
13. Millisel ajavahemikul on punkti liikumise kiirendus negatiivne, millisel positiivne? Millal on punkti liikumine aeglustuv, millal kiirenev?
14. Skitseerige graafik, mis kirjeldab punkti A liikumise kiirenduse $a(t)$ sõltuvust ajast t. Võrrelge saadud kolme graafikut. Mida huvitavat selgub?
15. Lahendage antud ülesanne ka arvutil, uurides vastavaid liikumist kirjeldavaid graafikuid. Milles seisnevad erinevate lahendusmeetodite eelised ja puudused?

5.8. FUNKTSIOONI UURIMINE

Võtame kõik seniõpitud tuletise rakendused kokku nn. funktsiooni uurimise ülesandes.

Funktsiooni $y = f(x)$ uurimine toimub järgmise skeemi järgi.

1. Teeme kindlaks funktsiooni määramispiirkonna *X*.

Määramispiirkonda ei kuulu näiteks funktsiooni valemis sisalduvate

- nimetajate nullkohad,
- juuritavate avaldiste negatiivsuspiirkonnad paarisarvulise juure korral,
- logaritmitavate avaldiste negatiivsuspiirkonnad ja nullkohad.

2. Leiame funktsiooni nullkohtade hulga X_0.

Selleks lahendame võrrandi $f(x)=0$.

3. Leiame funktsiooni positiivsuspiirkonna X^+ ja negatiivsuspiirkonna X^-.

Selleks lahendame vastavalt võrratused $f(x)>0$ ja $f(x)<0$.

4. Leiame funktsiooni ekstreemumkohtade hulga X_e ja määrame ekstreemumite liigi.

Selleks lahendame võrrandi $f'(x)=0$ ning kontrollime funktsiooni teise tuletise märki oletataval ekstreemumkohal. Negatiivse teise tuletise korral on tegemist maksimumi, positiivse korral miinimumiga. Kui teine tuletis puudub või on 0, siis uurime täiendavalt funktsiooni kasvamist ja kahanemist oletatava ekstreemumkoha ümbruses.

5. Avaldame funktsiooni kasvamisvahemikud $X\uparrow$ ja kahanemisvahemikud $X\downarrow$.

Selleks lahendame vastavalt võrratused $f'(x)>0$ ja $f'(x)<0$. Samas kontrollime, kas tuletis muudab märki kõigi tuletise nullkohtade juures. Kui mõnel juhul see nii ei ole, siis kuulub vastav argumendi väärtus ka kas kasvamis- või kahanemisvahemikku.

6.* Leiame funktsiooni graafiku käänukohtade hulga X_k.

Selleks lahendame võrrandi $f''(x)=0$. Ühtlasi kontrollime, kas saadud argumendi väärtuste juures funktsiooni teine tuletis muudab märki. Kohtadel, kus märgimuutus toimub, on graafiku käänukohad.

7.* Avaldame funktsiooni graafiku kumerusvahemikud $\breve{X}$ ja nõgususvahemikud $\bar{X}$.

Selleks lahendame vastavalt võrratused $f''(x)<0$ ja $f''(x)>0$. Ühtlasi kontrollime, kas teine tuletis muudab märki kõigi tema nullkohtade juures. Kui mõnel juhul see nii ei ole, siis kuulub vastav argumendi väärtus ka kas kumerus- või siis nõgususvahemikku.

8. Toetudes saadud andmetele, skitseerime funktsiooni graafiku.

Et saada täpsemat informatsiooni funktsiooni käitumise kohta argumendi lähenemisel pluss ja miinus lõpmatusele, on sageli otstarbekas leida veel piir-

väärtused $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ja $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. Vajaduse korral arvutame lisaks veel mõnede punktide koordinaadid.

Näide 1.

Uurime funktsiooni $y=x^4-18x^2+32$ esitatud skeemi järgi.

1. Funktsiooni määramispiirkond $X=\mathbf{R}$.

2. Nullkohtade leidmiseks lahendame võrrandi

$x^4-18x^2+32=0$.

Kasutame seejuures muutuja vahetust $z=x^2$.

Võrrandist $z^2-18z+32=0$ saame, et $z_1=16$ ja $z_2=2$.

Seega nullkohtade hulk $X_0=\{-4;-\sqrt{2};\sqrt{2};4\}$.

3. Positiivsuspiirkonna leidmiseks lahendame võrratuse

$x^4-18x^2+32>0$.

See võrratus on samaväärne võrratusega

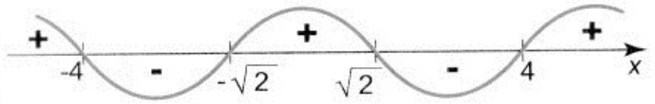
$(x-4)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+4)>0$.

Viimase lahendihulga, s.t. funktsiooni positiivsuspiirkonna leiame jooniselt 5.26.

$X^+=(-\infty;-4)\cup(-\sqrt{2};\sqrt{2})\cup(4;\infty)$.

Samalt jooniselt leiame kohe ka funktsiooni negatiivsuspiirkonna.

$X^-=(-4;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};4)$.



Joon. 5.26

4. Ekstreemumkohtade leidmiseks lahendame võrrandi $y'=0$.

$y'=4x^3-36x$.

Seega tuleb lahendada võrrand $4x^2-36x=0$.

$4x^3-36x=0\Rightarrow 4x(x^2-9)=0$,

millest saame võimalike ekstreemumkohtade hulga

$X_e=\{-3;0;3\}$.

Ekstreemumi liigi määramiseks leiame funktsiooni teise tuletise märgi võimalikel ekstreemumkohtadel.

Et $y''=12x^2-36$ ning $y''(\pm3)>0$ ja $y''(0)<0$, siis on vaadeldaval funktsioonil kohal $x_1=0$ maksimum ja kohtadel $x_{2,3}=\pm3$ miinimumid.

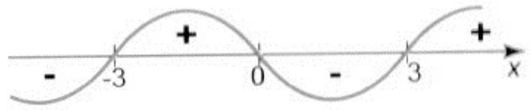
5. Kasvamisvahemike leidmiseks lahendame võrratuse $y'>0$. Saame, et

$4x^3-36x>0$.

See võrratus on samaväärne võrratusega

$4x(x-3)(x+3)>0$.

Viimase lahendihulga, s.t. uuritava funktsiooni kasvamisvahemikud, leiame jooniselt 5.27.



Joon. 5.27

$X_1 \uparrow = (-3; 0)$ ja $X_2 \uparrow = (3; \infty)$.

Samalt jooniselt saame ka funktsiooni kahanemisvahemikud.

$X_1 \downarrow = (-\infty; -3)$ ja $X_2 \downarrow = (0; 3)$.

6. Käänukohtade leidmiseks lahendame võrrandi $y'' = 0$ ja veendume, et teine tuletis muudab leitud kohtadel märki. Võrrandist

$12x^2 - 36 = 0$

saame, et $x_1 = -\sqrt{3}$ ja $x_2 = \sqrt{3}$.

See, et vaadeldava funktsiooni teine tuletis muudab nendel kohtadel märki, selgub järgmises alapunktis, kus uurime graafiku kumerus- ja nõgususvahemikke. Seega

$X_k = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

7. Graafiku nõgusus- ja kumerusvahemike leidmiseks lahendame vastavalt võrratused $y'' > 0$ ja $y'' < 0$.

Võrratus $12x^2 - 36 > 0$ on samaväärne võrratusega

$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0$.

Viimase lahendihulga, s.t. uuritava funktsiooni nõgususvahemikud, leiame jooniselt 5.28.

$\breve{X}_1 = (-\infty; -\sqrt{3})$ ja $\breve{X}_2 = (\sqrt{3}; \infty)$.

Samalt jooniselt saame kohe ka funktsiooni graafiku kumerusvahemiku.

$\hat{X} = (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

Ühtlasi näeme sellelt jooniselt, et vaadeldava funktsiooni teine tuletis muudab kohtadel $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ märki. Seega on antud funktsioonil nimetatud kohtadel tõepoolest käänupunktid.

8. Graafiku skitseerimiseks leiame veel piirväärtused $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ja $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ning ekstreemumpunktide ja käänupunktide ordinaadid.

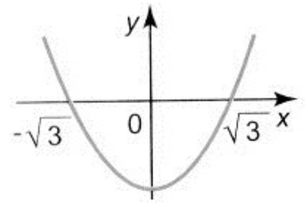
$$\lim_{x\to\infty}(x^4 - 18x^2 + 32) = \lim_{x\to\infty} x^4\left(1 - \frac{18}{x^2} + \frac{32}{x^4}\right) = \infty \text{ ja}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^4 - 18x^2 + 32) = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(1 - \frac{18}{x^2} + \frac{32}{x^4}\right) = \infty.$$

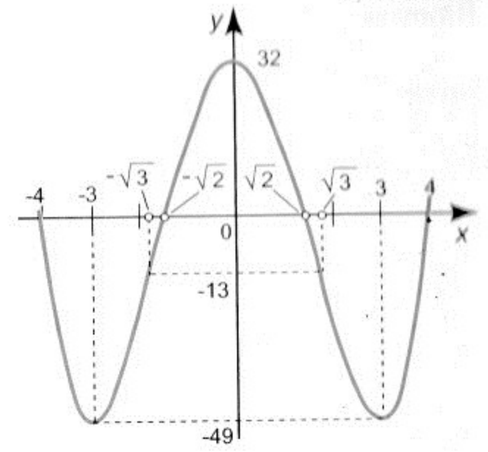
$Y_{\max} = f(0) = 32$.

$Y_{\min 1} = f(3) = -49$ ja $Y_{\min 2} = f(-3) = -49$.

$Y_{k1} = f(-\sqrt{3}) = -13$ ja $Y_{k2} = f(\sqrt{3}) = -13$.



Joon. 5.28



Joon. 5.29

Leitud andmetele tuginevalt saamegi skitseerida joonisel 5.29 esitatud funktsiooni

$y = x^4 - 18x^2 + 32$ graafiku.

A

729. Uurige funktsiooni ja skitseerige selle graafik.

1) $y = x^3 - 3x^2$; 2) $y = -2x^3 + 3x^2$; 3) $y = 2x^3 + 18x$;

4) $y = -3x^2 - 9x^4$; 5) $y = x^4 - 6x^2 + 5$; 6) $y = x^4 + 6x^2 - 7$.

730. Tehase kogukulutused kroonides teatud toote ühiku tootmisele sõltuvad toodangu hulgast nädalas x järgmiselt:

$k(x) = 0{,}01x^2 - 4x + 1000$, $50 \le x \le 300$.

Uurige funktsiooni $k(x)$ ja skitseerige selle graafik. Millist informatsiooni tootmiskulude kohta saame graafikult?

731. Punkt A liigub mööda sirget vastavalt seadusele $s(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t$, kus $s(t)$ on punkti kaugus sentimeetrites lähtepunktist t-nda sekundi lõpul ja $t \ge 0$. Uurige funktsiooni $s(t)$ ja skitseerige tema graafik. Millist informatsiooni punkti liikumise kohta saame sellelt graafikult (vt. ka ülesanne 728)?

B

732. Uurige funktsiooni ja skitseerige graafik.

1) $y = x^2 \ln x$; 2) $y = 2x \ln x$;

3) $y = -30 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 6x^{1\frac{2}{3}}$; 4) $y = -8x^{\frac{1}{3}} + 4x \cdot \sqrt[3]{x}$;

5) $y = \sqrt[3]{x^2}(5 - x)$; 6) $y = e^{-x^2}$.

733. Biomassi hulk t tunni möödudes teatud hetkest on arvutatav valemiga

$$m(t) = 750 + \frac{500t}{100 + t^2}.$$

Uurige funktsiooni $m(t)$ ja skitseerige graafik. Millist informatsiooni biomassi hulga muutumise kohta me sellelt saame?

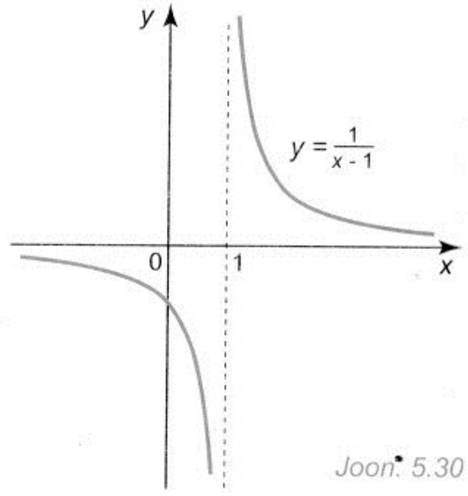
5.9. * MURDRATSIONAALSED FUNKTSIOONID

Seni oleme piirdunud vaid selliste funktsioonide uurimisega, mille graafik on pidev joon. Loobume nüüd sellest eeldusest ja vaatleme ka funktsioone, mille graafik on mittepidev joon. Sellisteks funktsioonideks on näiteks **murdratsionaalsed funktsioonid**, mis esituvad kujul

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kus $P(x)$ ja $Q(x)$ on ühe muutuja hulkliikmed, kusjuures $Q(x)$ on vähemalt esimese astme hulkliige.

Lisaks funktsiooni uurimise ülesandes tehtule on selliste funktsioonide graafiku joonestamisel otstarbekas leida ka funktsiooni graafiku **asümptoodid**.



Joon. 5.30

Näiteks joonestades funktsiooni $y = \frac{1}{x-1}$ graafikut, leiame ka selle asümptoodid. Vaadeldaval funktsioonil on kohal $x = 1$ püstasmüptoot, sest **lähenedes argumendi väärtusele $x = 1$ vasakult** saame, et selle funktsiooni väärtused lähenevad miinus lõpmatusele (joon. 5.30). **Lähenedes samale argumendi väärtusele aga paremalt** saame, et funktsiooni väärtused lähenevad pluss lõpmatusele.

Seda, et piirprotsessis lähenetakse argumendi väärtusele a vasakult, märgitakse järgmiselt: $x \to a-$, lähenemist paremalt tähistab aga sümbol $x \to a+$.

Seega antud juhul: $\lim\limits_{x \to 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ ja $\lim\limits_{x \to 1+} \frac{1}{x-1} = \infty$.

Sama funktsiooni graafikul on ka rõhtasümptoot. Et $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x-1} = 0$ ja $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$, siis on selleks sirge $y = 0$.

Meenutame ja täpsustame varemõpitut.

Sirge $x = a$ on funktsiooni $y = f(x)$ graafiku **püstasümptoodiks**, kui $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \infty$ (või $-\infty$) või $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \infty$ (või $-\infty$).

Sirge $y = b$ on funktsiooni $y = f(x)$ graafiku **rõhtasümptoodiks**, kui $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ või $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

Näide.

Leiame piirväärtuse $\lim\limits_{x \to 1-} \frac{2}{(x-1)(x+2)}$.

Vaatleme selleks, kuidas muutub avaldise $\frac{2}{(x-1)(x+2)}$ märk, kui läheneda väärtusele $x = 1$ vasakult. Paneme tähele, et vahemikus $(-2; 1)$ on vaadeldava murru nimetaja negatiivne, seega ka murru enese väärtus. Arvestades saadut ja seda, et $x \to 1-$ korral läheneb antud murru nimetaja nullile, näeme, et $x \to 1-$ korral $\frac{2}{(x-1)(x+2)} \to -\infty$.

Seega $\lim\limits_{x \to 1-} \frac{2}{(x-1)(x+2)} = -\infty$.

Analoogiliselt arutledes saame, et $\lim\limits_{x \to 1+} \frac{2}{(x-1)(x+2)} = \infty$.

Vaadeldud näitest selgub ühtlasi, et funktsiooni $y = \frac{2}{(x-1)(x+2)}$ graafikul on püstasümptoot $x = 1$. Analoogiliselt saame näidata, et sellel graafikul on ka teine püstasümptoot $x = -2$. Et $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{(x-1)(x+2)} = 0$, siis on selle funktsiooni graafikul ka rõhtasümptoot $y = 0$.

734. Uurige rõht- ja püstasümptootide omadusi.

1. Leidke $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ ja $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$, kus a on nimetaja nullkoht.

1) $f(x) = \frac{1}{x-4}$;
2) $f(x) = \frac{2}{x+3}$;
3) $f(x) = \frac{5}{(x-2)(x+3)}$;
4) $f(x) = \frac{1}{x(x-5)}$.

2. Kirjutage välja alapunktis 1 esitatud funktsioonide püstasümptootide võrrandid.

3. Milliste argumendi väärtuste korral on sirge $x=a$ funktsiooni $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ graafiku püstasümptoodiks?

4. Leidke $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ja $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

1) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$;
2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x}$;
3) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^3-1}$;
4) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^5+x-2}$.

5. Millega võrdub $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kui hulkliikme $P(x)$ aste on väiksem kui hulkliikme $Q(x)$ oma? Milline on funktsiooni $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ graafiku rõhtasümptoot, kui hulkliikme $P(x)$ aste on väiksem kui hulkliikme $Q(x)$ oma?

6. Leidke $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$;
2) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2x}$;
3) $f(x)=\dfrac{2x^3+1}{x^3-1}$;
4) $f(x)=\dfrac{x^5+1}{3x^5+x-2}$.

7. Millega võrdub $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kui hulkliikmete $P(x)$ ja $Q(x)$ astmed on võrdsed? Milline on funktsiooni $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ graafiku rõhtasümptoot, kui hulkliikmete $P(x)$ ja $Q(x)$ astmed on võrdsed?

Võttes kokku ülesandes 734 saadu, võime sõnastada järgmised asümptootide omadused.

Funktsiooni $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ graafiku püstasümptoodid $x=a$ läbivad selle funktsiooni nimetaja nullkohti.

Kui funktsiooni $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ lugejas oleva hulkliikme astendaja on väiksem nimetajas oleva omast, siis selle funktsiooni graafiku rõhtasümptoodiks on abstsisstelg.

Kui funktsiooni $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ lugejas ja nimetajas olevate hulkliikmete astmed on võrdsed, siis on selle funktsiooni graafiku rõhtasümptoodiks abstsissteljega paralleelne sirge $y=b$, kus $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

735. Leidke funktsiooni $y=f(x)$ graafiku rõht- ja püstasümptoodid.

1) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$;
2) $y=\dfrac{x}{x^3+1}$;
3) $y=\dfrac{2x^3}{x^3-1}$;
4) $y=\dfrac{3x^2+1}{x^2-4}$;
5) $y=\dfrac{2x}{x^2+x+1}$;
6) $y=\dfrac{x+2}{x^2+3}$;
7) $y=\dfrac{2x^2}{x^2+2x+10}$;
8) $y=\dfrac{x^2+1}{2x^2+8}$.

736. Uurige funktsiooni, skitseerige graafiku asümptoodid ja graafik.

1) $y=\dfrac{x+1}{x}$;
2) $y=\dfrac{x+1}{x^2}$;
3) $y=\dfrac{1-x}{x^2}$;
4) $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

737. Leidke parameetri a sellised väärtused, mille korral funktsiooni $y=\dfrac{x^2+2}{x^2+ax+9}$ graafikul on vaid üks püstasümptoot. Kontrollige vastuse õigsust, uurides saadud funktsiooni graafikut arvutil.

738. Leidke parameetri a sellised väärtused, mille korral funktsiooni $y=\dfrac{2x-1}{2x^2-3x+a}$ graafikul püstasümptoodid puuduvad. Kontrollige vastuse õigsust uurides saadud funktsioonide graafikuid arvutil.

739. Uurige funktsiooni $y=f(x)$ ja selle pöördfunktsiooni. Skitseerige graafikute asümptoodid ja graafikud.

1) $y=\dfrac{x+1}{1-x}$;
2) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

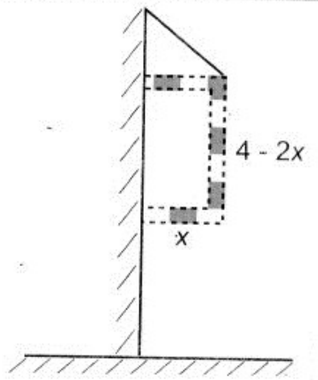
740. Veoauto maksimaalne lubatud sõidukiirus on 80 $\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. Bensiinikulu liitrites ühe kilomeetri kohta on arvutatav valemiga $k(v)=\dfrac{1}{200}\left(\dfrac{1600}{v}+v\right)$, kus v on auto sõidukiirus. Uurige funktsiooni $k(v)$ ja skitseerige tema graafik. Millist informatsiooni bensiinikulu kohta saame sellelt graafikult?

5.10. EKSTREEMUMÜLESANDED

Ülesannetes, kus leidsime funktsiooni ekstreemumkohta, oli meil seni alati teada uuritava funktsiooni valem. Praktiliste igapäevaprobleemide lahendamisel on aga olukord tavaliselt hulga keerulisem – ka uuritava funktsiooni valem tuleb meil ise koostada. Selliseid ekstreemumkohtade leidmisele taanduvaid ülesandeid nimetatakse **ekstreemumülesanneteks**. Tutvume nendega näidete varal.

Näide 1.

Äri seinale kavatsetakse riputada kolmest servast valgustitega ümbritsetav reklaamtahvel (joon. 5.31). Peremehel on valgusteid ostetud 4 meetri pikkuse lõigu katmiseks. Milliste mõõtmetega tuleb reklaamialus valmistada, kui tahetakse, et tema pindala oleks võimalikult suur?



Joon. 5:31

Koostame esmalt valemi funktsioonile, mille ekstreemumkohta soovime leida. Olgu reklaamtahvli laius x meetrit. Selle kõrgus on sellisel juhul $4-2x$ meetrit ja pindala

$$S(x)=x(4-2x)=4x-2x^2.$$

Leiame seejärel piirkonna, kust ekstreemumkohti tuleb otsida.

Vastavalt ülesande tingimustele on $x>0$ ja $4-2x>0$. Seega $x\in(0;2)$ ja x väärtused 0 ning 2 ei tule arvesse kui võimalikud ekstreemumkohad.

Funktsiooni ekstreemumkoha leidmiseks arvutame funktsiooni esimese ja teise tuletise ning lahendame võrrandi $S'(x)=0$.

$S'(x)=4-4x$ ja $S''(x)=-4$.

Võrrandist $4-4x=0$ saame, et ekstreemum võib olla kohal $x=1$. Et $S''(1)=-4<0$, siis on antud kohal tõesti funktsiooni maksimum.

Lõpuks leiame otsitava ristküliku teise külje pikkuse: $4-2\cdot1=2$ (m).

Vastus. Reklaamialus tuleks valmistada 1 meetri laiune ja 2 meetri kõrgune.

Näide 2.

Müüja kavatses päevas müüa 20 kg banaane hinnaga 12 krooni kilogramm. Sellisel juhul jäänuks talle töötasuks 2 krooni iga müüdud kilogrammi banaanide eest. Hiljem arvas ta aga, et iga 10-sendiline kilohinna alandus tõstab päevast läbimüüki 2 kilogrammi võrra. Millise hinnaga tuleks müüjal banaane müüa, et selle töö eest saadav tasu oleks maksimaalne? Oletame, et müüja arvamus läbimüügi kasvu kohta vastab tõele.

Koostame valemi funktsioonile, mille ekstreemumkohta me hakkame otsima. Leida tuleb seos töötasu $T(x)$ ja hinnaalanduse vahel. Olgu hinnaalandus

x korda 10 senti, s.o. $0{,}1x$ krooni. Sellisel juhul jääb müüjale töötasuks iga müüdud kilogrammi eest $2-0{,}1x$ krooni. Päevane läbimüük suureneb samas aga $2x$ kilogrammi võrra, olles $20+2x$ kilogrammi.

Sellise läbimüügi eest saadav tasu $T(x)$ on seega arvutatav valemiga

$T(x)=(2-0{,}1x)(20+2x)$.

Leiame esmalt piirkonna, kust tuleb ekstreemumkohta otsida.

Vastavalt ülesande tingimustele saame, et $x\ge0$ ja $2-0{,}1x\ge0$, millest näeme, et $x\in[0;20]$.

Seega otsitav on funktsiooni suurim väärtus lõigul $[0;20]$.

Leiame selleks funktsiooni $T(x)$ kõik võimalikud ekstreemumkohad lõigul $[0;20]$.

$T(x)=40+2x-0{,}2x^2$, $T'(x)=2-0{,}4x$ ja $T''(x)=-0{,}4$.

Võrrandist $2-0{,}4x=0$ saame, et uuritava funktsiooni ekstreemum võib olla kohal $x=5$.

Et $T''(5)=-0{,}4<0$, siis on antud kohal funktsiooni maksimum.

Ekstreemumid võivad olla veel ka lõigu $[0;20]$ otspunktides.

Leiame lõpuks funktsiooni väärtused kõigis võimalikes ekstreemumkohtades ja võrdleme neid.

$T(5)=45$; $T(0)=40$ ja $T(20)=0$.

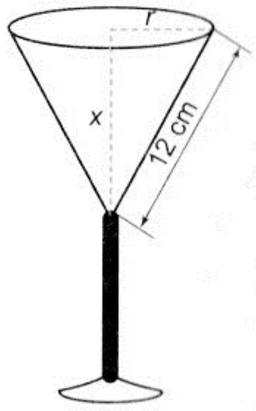
Siit näeme, et funktsioonil $T(x)$ on lõigus $[0;20]$ maksimum kohal $x=5$.

Seega banaane tuleks müüa hinnaga $12-5\cdot0{,}1=11{,}5$ krooni kilogramm.

Vastus. Banaane tuleks müüa hinnaga 11,5 krooni kilogramm.

Näide 3.

Koonusekujulise veiniklaasi moodustaja on 12 cm (joon. 5.32). Milline peaks olema koonuse põhja diameetri ja kõrguse suhe, et tema ruumala oleks maksimaalne?



Joon. 5.32

Koostame valemi funktsioonile, mille ekstreemumkohta me hakkame otsima. Avaldame selleks koonuse ruumala $V(x)$ tema kõrguse x kaudu.

$$V(x)=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot x.$$

Muutuja r elimineerimiseks saadud võrdusest kasutame seost $x^2+r^2=12^2$. Et $r^2=144-x^2$, siis saame, et

$$V(x)=\frac{1}{3}\pi(144-x^2)\cdot x,\ \text{millest}\ V(x)=\frac{144\pi}{3}x-\frac{\pi}{3}x^3.$$

Leiame piirkonna, kust tuleb ekstreemumkohta otsida. Ülesande tingimustele vastavalt saame, et $x\in(0;12)$. Seega argumendi väärtused 0 ja 12 ei tule

arvesse, kui võimalikud ekstreemumkohad. Funktsiooni ekstreemumkoha leidmiseks arvutame funktsiooni esimese ja teise tuletise ning lahendame võrrandi $V'(x)=0$.

$V'(x)=\frac{144\pi}{3}-\pi x^2$ ja $V''(x)=-2\pi x$.

Võrrandist $\frac{144\pi}{3}-\pi x^2=0$ saame, et vaadeldava funktsiooni ekstreemum võib olla kohal $x=4\sqrt{3}$.

Et $V''(4\sqrt{3})=-8\pi\sqrt{3}<0$, siis ongi antud koht funktsiooni maksimumkoht.

Lõpuks leiame saadud kõrgusele vastava põhja diameetri ja otsitud suhte.

$d=2r=2\sqrt{144-(4\sqrt{3})^2}=2\sqrt{144-48}=8\sqrt{6}$ ja

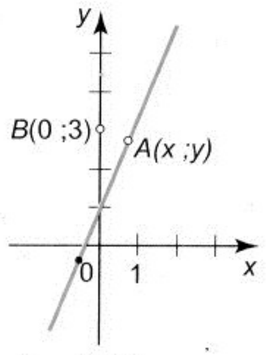
$\frac{2r}{x}=\frac{8\sqrt{6}}{4\sqrt{3}}=2\sqrt{2}$.

Vastus. Koonuse põhja diameetri ja kõrguse suhe peab olema $2\sqrt{2}$.

Näide 4.

Leiame punkti (0; 3) kauguse sirgest $y=2x+1$.

Punkti kauguse all sirgest mõistetakse lühimat võimalikku kaugust vaadeldava punkti ja sirgel asuva punkti vahel. Seega tuleb meil leida sirgel selline punkt $A(x;y)$, mille kaugus punktist $B(0;3)$ on minimaalne (joon. 5.33). Koostame valemi selle kauguse arvutamiseks.



Joon. 5.33

$d(x)=\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2}$.

Elimineerime muutuja y esitatud võrduses ja saame, et

$d(x)=\sqrt{x^2+(2x+1-3)^2}=\sqrt{5x^2-8x+4}$.

Vastavalt ülesande tingimustele otsime ekstreemumkohta vahemikus $(-\infty;\infty)$.

Paneme tähele, et kui kauguse ruut $d^2(x)$ on minimaalne, siis on seda ka kaugus $d(x)$. Arvestades öeldut, saame ülesande lahendust oluliselt lihtsustada. Leiame funktsiooni $d(x)$ miinimumkoha asemel hoopis funktsiooni

$k(x)=d^2(x)=5x^2-8x+4$

miinimumkoha. Selle leidmiseks arvutame funktsiooni $k(x)$ esimese ja teise tuletise ning lahendame võrrandi $k'(x)=0$.

$k'(x)=10x-8$ ja $k''(x)=10$.

Võrrandist $10x-8=0$ saame, et vaadeldava funktsiooni ekstreemum võib olla kohal $x=\frac{4}{5}$.

Et $k''\left(\frac{4}{5}\right)=10>0$, siis on funktsioonil $k(x)$, seega ka funktsioonil $d(x)$ kohal $x=\frac{4}{5}$ miinimum.

Arvutame lõpuks otsitud kauguse.

$d\left(\frac{4}{5}\right)=\sqrt{5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2-8\cdot\frac{4}{5}+4}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Vastus. Punkti (0; 3) kaugus sirgest $y=2x+1$ on $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

A

741. Jaotage arv 284 kaheks liidetavaks nii, et nende korrutis oleks maksimaalne.

742. Jaotage arv 30 kaheks liidetavaks nii, et nende ruutude summa oleks minimaalne.

743. Leidke kaks teineteisest 5 võrra erinevat arvu selliselt, et nende korrutis oleks minimaalne.

744. Millise arvu kuubi ja ruudu vahe on väikseim kõigist võimalikest sellistest vahedest?

745. Milline arv erineb oma naturaallogaritmist kõige vähem?

746. Leidke teravnurk, mille siinuse ja koosinuse summa on maksimaalne.

747. Olemasolevast materjalist saab valmistada tara pikkusega 16 m. Kolmest küljest on vaja tarastada ristkülikukujuline maatükk laohoone ees. Missuguste mõõtmete korral on tarastatud maatüki pindala suurim?

748. Täisnurkse kolmnurga kaatetite summa on 36 cm. Leidke kolmnurga küljed nii, et kolmnurga pindala oleks maksimaalne.

749. Ringi sisse on kujundatud ristkülik ümbermõõduga 40 cm. Millise ringi läbimõõdu korral on selle ristküliku pindala maksimaalne? Leidke see pindala.

750. Ristküliku pindala on 100 cm^2. Missuguste mõõtmete korral on selle ristküliku ümbermõõt vähim?

751. Rombi diagonaalide summa on konstantne. Millise diagonaalide pikkuste suhte korral on rombi pindala maksimaalne?

752. Trapetsi aluste ja kõrguse summa on konstantne. Millise kõrguse ja kesklõigu pikkuste suhte korral on selle trapetsi pindala maksimaalne?

753. Kaupluses müüakse iga päev keskmiselt 40 paari kingi hinnaga 200 krooni paar. Oletatakse, et kingahinna tõusu iga 10 krooni puhul väheneb päevane läbimüük

1 paari võrra. Mitme krooni võrra tuleks kingapaari hinda tõsta, et päevane kingade müügist saadav rahasumma oleks suurim? Mitme krooni võrra suureneks sel juhul kaupluse päevane läbimüük?

754. Kaupluses müüakse iga päev keskmiselt 80 kg suhkrut hinnaga 8 krooni kilogramm. Oletatakse, et suhkru kilohinna alandamise iga 10 sendi puhul suureneb päevane läbimüük 2 kg võrra. Mitme krooni võrra tuleks suhkru kilohinda alandada, et päevane suhkru müügist saadav rahasumma oleks suurim? Mitme krooni võrra suureneks sel juhul suhkru päevane läbimüük?

755. Ettevõtte turu-uuringus selgus, et kui tema toodangu ühiku hind on 40 krooni, siis nõutakse seda toodet 2000 ühikut nädalas. Hiljem tõdeti aga, et iga ühekroonine hinnaalandus tõstis nõudlust toote järgi 100 ühikut nädalas. Mitme krooni võrra tuleks toodangu ühiku hinda alandada, et selle müügist saadav rahasumma oleks suurim? Mitme krooni võrra suureneks sel juhul toodangu nädalane läbimüük?

756. Poiss kavatses päevas müüa 20 kg õunu hinnaga 8 krooni kilogramm. Sellisel juhul jäänuks talle töötasuks müümise eest 2 krooni iga müüdud kilogrammi õunte eest. Hiljem arvas ta aga, et iga 10-sendine kilohinna alandus tõstab päevast läbimüüki 2 kilogrammi võrra. Millise hinnaga tuleks poisil õunu müüa, et selle töö eest saadav tasu oleks maksimaalne? Oletame, et poisi arvamus läbimüügi kasvu kohta vastas tõele. Mitme krooni võrra suureneks sellisel juhul õunte müügist saadav tasu?

757. Poiss kavatses päevas müüa 100 kg kurke hinnaga 5 krooni kilogramm. Sellisel juhul jäänuks talle töötasuks müümise eest 1 kroon iga müüdud kilogrammi kurkide eest. Hiljem arvas ta aga, et iga 10-sendine kilohinna tõstmine vähendab päevast läbimüüki 10 kilogrammi võrra. Millise hinnaga tuleks poisil kurke müüa, et selle töö eest saadav tasu oleks maksimaalne? Oletame, et poisi arvamus läbimüügi vähenemise kohta vastas tõele. Mitme krooni võrra suureneks sellisel juhul kurkide müügist saadav tasu?

758. Traadist, mille pikkus on 90 cm, on tarvis valmistada korrapärase kolmnurkse prisma mudel. Kui suur tuleb teha prisma põhiserv, et prisma külgpindala saaks suurim?

759. Traadist, mille pikkus on 120 cm, on tarvis valmistada korrapärase nelinurkse risttahuka mudel. Kui suur tuleb teha risttahuka põhiserv, et tema täispindala saaks suurim?

760. Ristküliku ümbermõõt on 30 cm. Ristküliku pöörlemisel ümber ühe külje tekib maksimaalse võimaliku ruumalaga silinder. Leidke ristküliku mõõtmed.

761. Ristküliku ümbermõõt on 40 cm. Ristküliku pöörlemisel ümber ühe oma külje tekib maksimaalse võimaliku külgpindalaga silinder. Leidke ristküliku mõõtmed.

762. Leidke sellise väikseima täispindalaga silindri põhja raadius ja kõrgus, mille ruumala on 27π cm^3.

763. Võrdhaarne kolmnurk, mille aluse ja haara summa on 24 cm, pöörleb ümber alusele tõmmatud kõrguse. Missuguse aluse puhul on tekkinud pöördkeha külgpindala suurim?

764. Täisnurkne kolmnurk, mille kaatetite summa on 30 cm, pöörleb ümber ühe oma kaateti. Milline peab olema tekkinud pöördkeha kõrgus, et tema ruumala oleks maksimaalne?

765. Leidke sirgel $y = 2x + 1$ selline punkt, mille kaugus punktist (3; 1) on minimaalne.

766. Leidke punkti (3; 0) kaugus sirgest $y = 2x - 1$.

767. Leidke joonel $y = \sqrt{x}$ selline punkt, mille kaugus punktist (5; 0) on minimaalne.

768. Leidke punkti (0; 4) lühim kaugus paraboolist $y = x^2$.

B

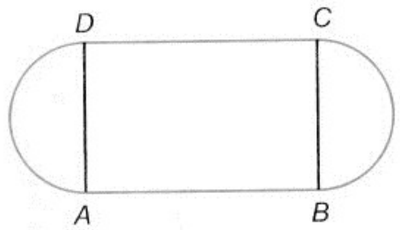
769. Leidke positiivne arv, mille summa oma pöördarvuga on vähim kõigist võimalikest sellistest summadest.

770. Positiivne arv n on jaotatud kaheks liidetavaks selliselt, et nende liidetavate logaritmide summa on maksimaalne. Leidke selliste liidetavate suhe.

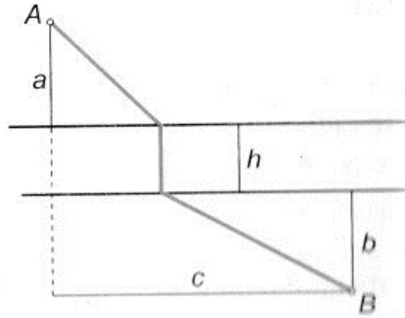
771. Spordiväljakut, mis koosneb ristkülikust ja kahest poolringist, piirab 400 m pikkune jooksurada (joon. 5.34). Millise, pindalalt suurima, ristkülikukujulise palliplatsi saame sellistel tingimustel ehitatud väljakule rajada?

772. Leidke jõe kaldal koht, kuhu tuleks ehitada sild, et tee pikkus punktide A ja B vahel oleks minimaalne (joon. 5.35, mõnikord saab ka tuletiseta!).

773. Võrdhaarse trapetsi pindala on 2 cm^2 ja alusnurk 60°. Milline peab olema selle trapetsi kõrgus, et tema ümbermõõt oleks minimaalne?



Joon. 5.34



Joon. 5.35

774. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 30 cm. Milline peab olema kolmnurga alus, et kolmnurga pindala oleks maksimaalne?

775. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on a ja b. Sellesse kolmnurka on joonestatud ristkülik, mille kaks külge asuvad kolmnurga kaatetitel ning üks tipp hüpotenuusil. Leidke sellise ristküliku maksimaalne võimalik pindala.

776. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on a ja b. Sellesse kolmnurka on joonestatud ristkülik, mille kaks tippu asuvad kolmnurga kaatetitel ning üks külg hüpotenuusil. Leidke sellise ristküliku maksimaalne võimalik pindala.

777. Ettevõtte turu-uuringus selgus, et kui tema toodangu ühiku hind on 20 krooni, siis nõutakse seda toodet 1000 ühikut nädalas. On teada, et iga 1-kroonine hinnaalandus tõstab nõudlust toote järele 50 ühikut nädalas. Kas ettevõte saab hinnaalandusega oma tulu tõsta?

778. Ettevõtte turu-uuringus selgus, et kui tema toodangu ühiku hind on 40 krooni, siis nõutakse seda toodet 1000 ühikut nädalas. On teada, et iga 1-kroonine hinnatõus vähendab nõudlust toote järele k ühikut nädalas. Millise nädalase nõudluse vähenemise k korral pole ettevõttel võimalik enam hinnatõstmisega oma tulu tõsta?

779. On tarvis valmistada antud ruumalaga silindrikujuline konservipurk. Milline peaks olema selle purgi kõrguse ja põhja läbimõõdu suhe, kui tahame, et purgi valmistamiseks kuluks võimalikult vähe materjali?

780. On tarvis valmistada antud ruumalaga koonusekujuline lehter. Milline peaks olema selle lehtri kõrguse ja põhja läbimõõdu suhe, kui tahame, et tema valmistamiseks kuluks võimalikult vähe materjali?

781. Ristküliku kaks tippu on x-teljel ja kaks neist ülalpool paraboolil $y = 4 - x^2$. Leidke sellise ristküliku suurim võimalik pindala.

5.11. * FUNKTSIOONI TULETIS LIGIKAUDSETES ARVUTUSTES

5.11.1. FUNKTSIOONI DIFERENTSIAAL. VEAARVUTUS

Funktsiooni tuletise rakendustes ligikaudsel arvutamisel kasutatakse funktsiooni diferentsiaali mõistet. Tutvume sellega lähemalt. Meenutame, et funktsiooni tuletis defineeritakse kui funktsiooni muudu Δy ja argumendi muudu Δx suhte piirväärtus, kus argumendi muut läheneb nullile. Jooniselt 5.36 näeme, et argumendi ja funktsiooni muut on seejuures kaatetiteks kõverkolmnurgas ABC, mille hüpotenuus asub funktsiooni $y = f(x)$ graafikul.

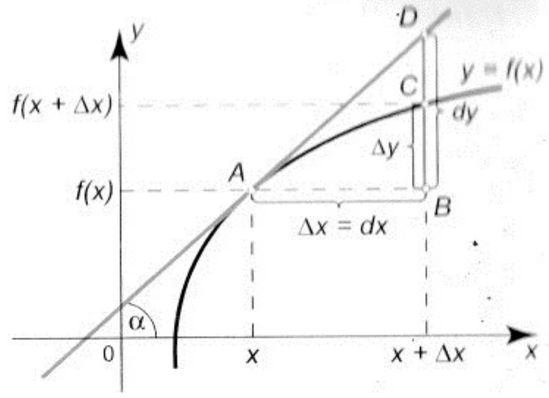
Vaatleme nüüd kolmnurka ABD. Erinevalt kolmnurgast ABC on kolmnurga ABD hüpotenuus määratud funktsiooni $y = f(x)$ graafikule kohal x joonestatud puutujaga.

Avaldame kaateti BD:

$$BD = AB \cdot \tan \angle BAD = \Delta x \cdot \tan \alpha .$$

Kuna funktsiooni tuletis antud kohal on võrdne funktsiooni graafikule sellel kohal joonestatud puutuja tõusuga, $f'(x) = k = \tan \alpha$, siis

$$BD = f'(x) \cdot \Delta x.$$



Joon. 5.36

Saadud võrduse paremal pool olevat avaldist $f'(x) \cdot \Delta x$ nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaaliks ja tähistatakse sümboliga dy, s.t.

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \qquad (1)$$

Argumendi muutu $\Delta x = dx$ samas valemis nimetatakse vastavalt argumendi diferentsiaaliks. Niisiis

$$dy = f'(x) \cdot dx \text{ ehk } f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Jooniselt 5.36 näeme, et kui $\Delta x \to 0$, siis $\Delta y \to dy$, s.t. kui Δx on küllalt väike, on $dy \approx \Delta y$. Seega, arvestades valemit (1), võime kirjutada, et

$$\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x.$$

Viimati saadud seos ongi aluseks järgmisele, praktikas väga sageli kasutatavale veaarvutusvalemile:

$$\Delta(y) = |f'(x)| \cdot \Delta(x), \qquad (2)$$

kus $\Delta(x)$ on mõõtmistulemuse x **absoluutne viga***, $y = f(x)$ valem suuruse y arvutamiseks ja $\Delta(y)$ arvutustulemuse absoluutne viga.

Vea suhtelist suurust tulemusega võrreldunа esitab **tulemuse suhteline viga** $\delta(x)$. See arvutatakse valemist:

$$\delta y = \frac{\Delta(y)}{y} \cdot 100\%.$$

* S.o. maksimaalne võimalikest lähendi vigadest.

Näide.

Kuubi serva mõõtmisel kasutatava mõõtevahendi maksimaalne võimalik viga on 0,02 cm. Leiame kuubi ruumala arvutamisel tehtava absoluutse ja suhtelise vea, kui kuubi serva pikkuseks mõõdeti 15 cm.

Olgu kuubi ruumala V ja tema serva pikkus x, siis

$V(x) = x^3$.

Leiame selle funktsiooni tuletise kohal $x = 15$. Et $V'(x) = 3x^2$, siis

$V'(15) = 3 \cdot 225 = 675$.

Kasutades valemit 2 ja seda, et mõõtmisel tehtav absoluutne viga $\Delta(x) = 0{,}02$, saame, et

$\Delta(y) = 675 \cdot 0{,}02 = 13{,}5$.

Lõpuks leiame suhtelise vea.

$$\delta = \frac{\Delta(y)}{y} \cdot 100 = \frac{13{,}5}{15^3} \cdot 100 = 0{,}4\%.$$

Vastus. Kuubi ruumala absoluutne ja relatiivne viga on vastavalt 13,5 cm^3 ja 0,4%.

782. Leidke antud valemi, lähendi ning selle absoluutse vea abil arvutustulemuse absoluutne ja suhteline viga.

1) $y = \frac{x}{x+1}$ ja $x = 21(\pm 0{,}3)$;*

2) $y = 2x^2 - 3x + 1$ ja $x = 5(\pm 0{,}01)$.

783. Kuubi serva mõõtmisel saadi tulemus 25 (±0,05) cm. Leidke kuubi täispindala arvutamisel tehtav absoluutne ja relatiivne viga.

784. Ringi diameetri mõõtmisel saadi tulemus 12 (±0,04) m. Leidke ringi pindala arvutamisel tehtav absoluutne ja suhteline viga.

785. Võrdkülgse kolmnurga külje mõõtmisel saadi tulemus 5 (±0,01) cm. Leidke kolmnurga pindala arvutamisel tehtav absoluutne ja suhteline viga.

786. Korrapärase kuusnurkse prisma kõrgus on võrdne prisma alusservaga. Prisma põhiserva mõõtmisel saadi tulemus 9 (±0,1) cm. Leidke selle prisma täispindala ja ruumala arvutamisel tehtavad suhtelised vead.

787. Koonuse kõrgus on võrdne koonuse põhja raadiusega. Põhja raadiuse mõõtmisel saadi tulemus 8 (±0,01) cm. Leidke koonuse täispindala ja ruumala arvutamisel tehtavad suhtelised vead.

* Sulgudes on toodud lähendi absoluutne viga.

5.11.2.* NEWTONI MEETOD VÕRRANDI LIGIKAUDSE LAHENDI TÄPSUSTAMISEKS

Funktsiooni uurimise ülesannete lahendamisel ei õnnestu meil alati funktsiooni kõiki nullkohti täpselt leida. Samas oskame me aga määrata nullkohtade arvu ja x-telje vahemikud, kus need nullkohad asuvad. Teades vahemikku, kus funktsiooni $y = f(x)$ nullkoht asub, teame me ka vahemikku, kust otsida võrrandi $f(x) = 0$ lahendit. Selle lahendi esimeseks lähendiks x_1 võime võtta näiteks antud vahemiku ühe otspunkti. Küsime nüüd, kuidas täpsustada saadud ligikaudset lahendit?

Vaatame näiteks võrrandit $x^3 - x - 5 = 0$. Kuna funktsioon $f(x) = x^3 - x - 5$ on pidev ja $f(1) < 0$ ning $f(2) > 0$, siis on vähemalt üks selle võrrandi lahend vahemikus (1; 2). Võtamegi võrrandi lahendi esimeseks lähendiks selle vahemiku otspunkti $x_1 = 2$ ja püüame seda täpsustada.

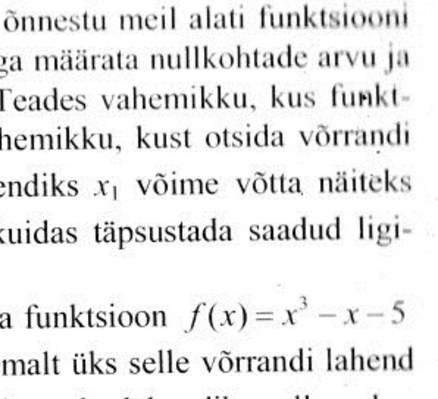
Tõmbame funktsiooni $y = f(x)$ graafikule kohal x_1 puutuja (joon. 5.37). Jooniselt näeme, et selle puutuja ja x-telje lõikepunkt asub otsitavale nullkohale märksa lähemal kui esimene meie poolt valitud lähend. Valimegi võrrandi lahendi järgmiseks lähendiks x_2 argumendi väärtuse lõikekohal ja leiame valemi selle arvutamiseks. Et

$$f'(x_1) = \tan\alpha = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}, \text{ siis } x_1 - x_2 = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \text{ millest}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Kui tahame veelgi täpsemat lähendit, siis kordame sama mõttekäiku, võttes esimeseks lähendiks x_2. Nii saame valemi x_3 arvutamiseks:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$



Joon. 5.37

Analoogiliselt jätkates võime saada võrrandi lahendi ligikaudse väärtuse kuitahes suure täpsusega. Seega iga järgneva lähendi x_{n+1} arvutamiseks eelneva kaudu võime kasutada valemit

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.} \qquad (1)$$

Selline võrrandi lahendi täpsustamise meetod kannab nimetust **Newtoni meetod** võrrandi ligikaudsel lahendamisel.

Näide.

Leiame võrrandi $x^3 - x - 5 = 0$ lahendi tuhandike täpsusega.

Nagu ülal selgus, võime lahendi esimeseks lähendiks valida $x_1 = 2$. Selle täpsustamiseks tuleb meil leida funktsiooni $f(x) = x^3 - x - 5$ ja tema tuletise väärtused kohal $x_1 = 2$.

$f(2) = 2^3 - 2 - 5 = 1$.

$f'(x) = 3x^2 - 1$ ja $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11$.

Kasutades valemit (1) saame nüüd teise lähendi antud võrrandi lahendile.

$$x_2 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{1}{11} \approx 1{,}909.$$

Analoogiliselt leiame lähendid x_3 ja x_4.

$$x_3 = 1{,}909 - \frac{0{,}048}{9{,}935} \approx 1{,}904.$$

$$x_4 = 1{,}904 - \frac{0{,}002}{9{,}878} \approx 1{,}904.$$

Et kõik kohad kuni tuhandikeni jäid viimastes lähendites püsima, siis võime öelda, et lähend $x_4 = 1{,}904$ on vaadeldava võrrandi ligikaudseks lahendiks tuhandike täpsusega.

Märkus. On loomulik, et arvuti olemasolul koostame programmi, mis realiseerib ülalesitatud arvutused.

788. Leidke, missuguste täisarvude vahel on järgmistel võrranditel lahend.

1) $x^3 - 3x - 1 = 0$;
2) $x^3 + x^2 - 1 = 0$;
3) $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$;
4) $x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$.

789. Leidke järgmistele võrranditele lahendite täisarvulised lähendid ja täpsustage neid Newtoni meetodiga sajandike täpsuseni.

1) $x^3 - 4x + 7 = 0$; 2) $x^3 + 6x^2 + 5 = 0$; 3) $x^4 - x - 4 = 0$; 4) $x^3 - 2x - 5 = 0$.

790. Valige ülaltoodud näites oleva võrrandi $x^3 - x - 5 = 0$ lahendi esimeseks lähendiks $x_1 = 1$ ja täpsustage seda Newtoni meetodiga.

1. Kumb lähendeist, kas x_1 või x_2, asub võrrandi vahemikus (1; 2) paiknevale lahendile lähemal?
2. Kas kolmas lähend on täpsem kui teine?
3. Püüdke leida tingimus, mida peab rahuldama esimene lähend, et juba teisena saadud lähend oleks kindlasti täpsem kui esimene.

Näpunäide. Joonistage selleks mitu erinevat joonist selliselt, et funktsiooni graafik lõikaks abstsisstelge kord kumerana, kord nõgusana, kord tõusva, kord langeva joonena. Milline on optimaalse variandi korral seos funktsiooni ja selle teise tuletise märkide vahel?

Enesekontrolliks

791. Bakterite arv N teatavas biomassis muutub seaduse $N = 500 + 54t + 2t^2$ järgi. Kui suur oli bakterite lähtearv biomassis? Kui suur on bakterite juurdekasv ajamomendil $t = 4$ min?

792. Sügavasse kraatrisse lasti kukkuda kivi, mis langes seaduse $s = 4{,}9t^2$ järgi. Kui sügav on kraater, kui kivi langes kraatri põhja 8 sekundiga? Kui suur on kivi liikumise kiirus põhja jõudmise hetkel?

793. Kivi liikus pärast heidet maa suhtes vertikaalselt seaduse $s = 2 + 15t - 5t^2$ (s – kaugus maapinnast meetrites) järgi. Vastake järgmistele küsimustele.

1. Kui kõrgelt kivi visati?
2. Kui suur oli kivi liikumise algkiirus?
3. Kas kivi visati üles või alla (uurige kiirendust)?
4. Mitu sekundit pärast viset asus kivi maapinnast kõige kõrgemal, kui kõrgel?
5. Mitu sekundit pärast viset kukkus kivi maha?
6. Kui suur oli kivi kiirus mahakukkumise hetkel?

794. Leidke funktsiooni $y = f(x)$ graafiku puutuja tõus kohal x_0.

1) $y = 2x^2 - x + 1$, $x_0 = 3$;
2) $y = \tan x$, kui $x_0 = \frac{\pi}{4}$;
3) $y = \frac{2x}{x+1}$, $x_0 = 1$;
4) $y = \frac{x+1}{x^2}$, $x_0 = -1$.

795. Leidke argumendi x väärtused, mille korral funktsiooni $y = f(x)$ graafikule joonestatud puutuja

a) moodustab x-teljega teravnurga;
b) on x-teljega paralleelne ja
c) moodustab x-teljega nürinurga.

1) $y = 4x^3 - 21x^2 + 18x$;
2) $y = \frac{x^2 - 1}{2x + 1}$.

796. Leidke joone $y = f(x)$ puutuja võrrand etteantud tingimustel.

1) $y = 2x^2 - 6x$, kui puutepunkti abstsiss on 2;
2) $y = \frac{\sqrt{x}}{2x - 1}$, kui puutepunkti ordinaat on 1;
3) $y = 2e^x - x$, kui puutuja moodustab x-teljega 45°-lise nurga;
4) $y = 1 + \ln x$, kui puutuja tõus on $\frac{1}{e}$.

797. Leidke funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

1) $y = x - \ln x$; 2) $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

798. Leidke funktsiooni suurim ja vähim väärtus etteantud lõigul.

1) $y = x^2 - 4x + 1$, kui $x \in [0; 5]$; 2) $y = \sin x$, kui $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

799. Leidke funktsiooni ekstreemumid ja määrake nende liik.

1) $y = x \ln x$; 2) $y = xe^x$.

800. Leidke funktsiooni ekstreemumpunktid, kasvamis- ja kahanemisvahemikud ning skitseerige funktsiooni graafik. Mitu nullkohta on funktsioonil?

1) $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 6$; 2) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$.

801. Teatud nakkushaigus levib selliselt, et elanike haigestumisprotsent p sõltub ajast t (ööpäevades) järgmiselt:

$p = 0{,}005(12t^2 - t^3)$, kus $0 \le t \le 12$.

Mitu protsenti elanikest on haigestunud teise päeva lõpuks?
Millistel päevadel haigestunute protsendimäär kasvab?
Mitmendast päevast alates hakkab haigestunute protsent kahanema?
Mitmendal päeval saavutab haigestumise protsent maksimumi?

802. Leidke funktsiooni graafiku käänupunktid ning kumerus- ja nõgususvahemikud.

1) $y = x^3(x-5) + 6(x-1)(x+1)$; 2) $y = x^3(x+4) + 6x^2 + 4x + 2$;
3) $y = x^4 + 12x^2 - 24$; 4) $y = x + 4\sin x$;
5) $y = x^3 + 6\ln x$; 6) $y = xe^x$.

803. Uurige funktsiooni ja skitseerige tema graafik.

1) $y = x^2(x-3)$; 2) $y = 5 + x^2(x^2 - 6)$.

804. Punkt A liigub mööda sirget vastavalt seadusele

$s(t) = t^3 - 10{,}5t^2 + 30t$, kus $s(t)$ on punkti kaugus sentimeetrites lähtepunktist t-nda sekundi lõpul ja $t \ge 0$. Uurige funktsiooni $s(t)$ ja skitseerige tema graafik. Millist informatsiooni punkti liikumise kohta saame sellelt graafikult?

805. Uurige funktsiooni, skitseerige graafiku asümptoodid ja graafik.

1) $y = \dfrac{x-1}{x}$ 2) $y = \dfrac{2x^2+1}{x^2}$.

806. Jaotage arv 160 kaheks liidetavaks selliselt, et nende korrutis oleks maksimaalne.

807. Ristkülikukujulise maatüki pindala on 400 m^2. Missuguste mõõtmete korral on selle maatüki ümbermõõt vähim?

808. Kolmnurka, mille kõrgus on 6 cm ja alus 4 cm, on kujundatud maksimaalse pindalaga ristkülik. Leidke selle ristküliku pindala.

809. Leidke silindri maksimaalne ruumala, kui silindri telglõike ümbermõõt on 6 dm.

810. Kaupluses müüakse iga päev keskmiselt 40 vihikut hinnaga 4 krooni tükk. Oletatakse, et vihiku hinna alandamise iga 10 sendi puhul suureneb nende päevane läbimüük 2 vihiku võrra. Mitme krooni võrra tuleks vihiku hinda alandada, et päevane vihikute müügist saadav rahasumma oleks suurim? Mitme protsendi võrra suureneks sel juhul vihikute päevasest läbimüügist saadav rahasumma?

811. Leidke antud valemi, lähendi ning selle absoluutse vea abil arvutustulemuse absoluutne ja suhteline viga.

$y = \dfrac{x^2}{x+1}$ ja $x = 9\,(\pm 0{,}2)$.

812. Kolmnurkse püramiidi kõik servad on võrdsed. Püramiidi serva mõõtmisel saadi tulemuseks 5 ($\pm 0{,}1$) cm. Leidke selle püramiidi täispindala arvutamisel tehtav absoluutne ja suhteline viga.

813. Leidke kaks teineteisele vahetult järgnevat täisarvu, mille vahel asub võrrandi $y = x^3 - 2x + 3$ lahend.

814. Leidke vahemikust (1; 2) võrrandi $x^3 - 3x - 1 = 0$ lahend tuhandike täpsusega.

Ülesandeid kordamiseks

815. Leidke aritmeetilise jada seitsmes liige, kui selle jada neljas liige on 21 ja üheteistkümnes liige on –28.

816. Aritmeetilise jada esimene liige on 1,2 ja neljas liige 1,8. Leidke jada esimese 6 liikme summa.

817. Leidke esimese 100 paaritu naturaalarvu summa.

818. Kuul läbib maapinnale langedes esimeses sekundis 16 m, teises sekundis 48 m, kolmandas sekundis 80 m jne. Kui suur on kuuli langemise kiirus 11. sekundis? Kui kaugele on kuul langenud 11 sekundiga?

819. Kolmnurga nurgad on aritmeetilise jada järjestikusteks liikmeteks. Tõestage, et üks nurkadest on 60°.

820. Leidke geomeetrilise jada kuues liige.

1) $a_3 = 4{,}8$; $a_5 = 19{,}2$; 2) $a_4 = -40$; $q = -2$.

821. Risttahuka ruumala on 64 dm^3. Leidke risttahuka mõõtmed, kui need on geomeetrilise jada järjestikused liikmed, kusjuures kahe mõõtme korrutis on võrdne kolmanda mõõtmega.

822. Eestis oli 1992. a. algul 1 562 000 elanikku ja aasta jooksul vähenes elanike arv 1,7%. Kui suur oleks Eesti elanike arv 2000. a. algul eeldusel, et rahvaarv väheneb igal aastal sama protsendi võrra? Võrdle oma tulemust rahvaloenduse andmetega.

823. Teisendage lõpmatu perioodiline kümnendmurd harilikuks murruks.

1) 2,1(3); 2) 2,(13); 3) 3,0(19); 4) 0,10(5).

824. Leidke hääbuva geomeetrilise jada kolmas liige, kui jada summa on 2 ja teine liige on 0,5.

825. Leidke korrapärase kolmnurga ümberringjoone pikkus, kui kolmnurga külg on $12\sqrt{3}$ cm.

826. Õunapuu kõrgus y (meetrites) avaldub õunapuu vanuse t (aastates) funktsioonina järgmiselt: $y=\frac{12t}{t+10}$. Kui kõrge on õunapuu, mille vanus on 3 aastat, 10 aastat, 20 aastat, 50 aastat? Kui vanalt saab õunapuu 13-meetriseks?

827. Statistika näitab, et keskmine inimeste arv ühes maaperes on pidevalt kahanenud, kusjuures kahanemine on ligikaudu kirjeldatav lineaarfunktsiooniga. Aastal 1900 oli igas maaperes keskmiselt 4,76 inimest ja aastal 1980 keskmiselt 2,75 inimest. Esitage valem maapere keskmise suuruse P arvutamiseks aastal x. Kui suur on keskmine maapere aastal 2000? Mis aastast alates on keskmise pere suurus väiksem kui 2 inimest?

828. Missuguse parameetri a väärtuse korral on funktsioon $y=x-ax+a$ kasvav?

829. Leidke funktsiooni määramispiirkond.

1) $y=\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$; 2) $y=\sqrt{x}-\frac{3x}{x-6}$; 3) $y=\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$.

830. Esitage valemina seos inimese pikkuse x (meetrites) ja tema nägemisraadiuse y (meetrites) vahel, kui inimene seisab tasasel lagedal kohal. Maakera raadius on 6378 km. Kui palju kaugemale näeb 180 cm pikkune inimene 170 cm pikkusest inimesest?

831. Joonestage graafik ja uurige selle abil funktsiooni.

1) $y=-x^2+3x+4$; 2) $y=|2x-3|$;

3) $y=x^4+4$; 4) $y=-x^3+1$.

Missugused funktsioonidest on paarisfunktsioonid, missugused paaritud funktsioonid?

832. Leidke funktsiooni pöördfunktsioon, kui see leidub.

1) $y=0,5x-4$; 2) $y=\sqrt[3]{x}+2$; 3) $y=2x^4-1$; 4) $y=\sqrt{x}-3$.

833. Panka pandi 500 kr. Kui suur rahasumma on pangas 1, 2, 3 ja 4 aasta möödudes, kui pank maksab igal aastal 5% intressi?

834. Segametsa juurdekasv aastas moodustab 3% aasta algul olemas olevast puidust. Mitme aasta pärasat kahekordistub puidu kogus segametsas?

835. Metsalangil arvatakse olevat 6500 m^3 puitu. Kui palju on puitu sellel metsalangil 10 aasta pärast, kui iga-aastane juurdekasv moodustab keskmiselt 2%?

836. Kui suur rahasumma tuleb paigutada panka intressiga 5% aastas, et 20 aasta pärast oleks pangaarvel 10 000 kr.?

837. Mitme aastaga kahekordistub riigi elanikkond, kui elanikkonna aastane juurdekasv on 1,5%?

838. Kahe rahvaloenduse vahelisel ajal (1970.–1979. a.) suurenes eestlaste arv Eestis keskmiselt 0,27% aastas. Eeldades, et nimetatud kasvuprotsent jääb muutumatuks, leidke, mitme aasta pärast on eestlaste arv Eestis kasvanud 1,5-kordseks.

839. Masin maksis uuena 100 000 kr. Selle väärtus väheneb vananemise ja kulumise tõttu igal aastal 6% võrra eelmise aasta väärtusest. Kui suur on masina väärtus 10 aasta pärast?

840. Radioaktiivsest ainest laguneb ööpäevas 3%. Mitu grammi radioaktiivset ainet on alles nelja ööpäeva pärast, kui praegu on seda 50 grammi?

841. Nõust voolab ööpäevas välja $\frac{1}{10}$ nõus olevast vedelikust. Mitme ööpäeva pärast on nõust välja voolanud vähemalt pool esialgu nõus olnud vedelikust?

842. Leidke järgmise funktsiooni positiivsuspiirkond, negatiivsuspiirkond, kasvamisvahemik ja kahanemisvahemik.

1) $y=13^x$; 2) $y=5\cdot 6^x$; 3) $y=4^{x+3}$;

4) $y=0,8^x$; 5) $y=0,5\cdot 0,4^x$; 6) $y=0,92^{x-1}$;

7) $y=2e^x$; 8) $y=3e^{-x}$; 9) $y=3^{2-x}$.

843. Lahendage võrrand.

1) $25^{2x}=5$; 2) $2^x=0,125$; 3) $3^{-4x}=3^{2x-5}$;

4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x-3}=\frac{1}{7^3}$; 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1,5^4$; 6) $2^x=0,4\cdot 5^x$;

7) $2^{2x}\cdot 25^x=100$; 8) $6^{3x}=36$; 9) $3^{x-4}=27^{2x+6}$.

844. Lahendage võrrand.

1) $4^{2x} - 2 \cdot 2^{2x} - 8 = 0$;
2) $5 \cdot 0{,}6^{2x} - 8 \cdot 0{,}6^{x} + 3 = 0$;
3) $6^{x} - 6 \cdot 2^{x} = 3 \cdot 2^{x}$;
4) $2 \cdot 3^{x} - 3 \cdot 2^{x} = 0$;
5) $3 \cdot 5^{2x} + 2 \cdot 5^{x+1} - 5^{2+x} = 0$;
6) $7^{x+1} = 3$;
7) $10 - 5^{x} = 0$;
8) $2^{x+2} \cdot 5^{x+1} = 0{,}02$;
9) $3^{x} \cdot 5^{x-1} = 3$;
10) $2^{4x} \cdot 3^{4x} \cdot 5^{4x} = 30$.

845. Leidke.

1) $\log 0{,}0001$;
2) $\ln e^{-8}$;
3) $\log_{0,2} 0{,}0016$.

846. Leidke logaritmitav x, kui

1) $\log x = -4$;
2) $\ln x = 0{,}5$;
3) $\log_3 x = 1{,}5$.

847. Leidke arv a, kui

1) $\log_a 25 = 3$;
2) $\log_a 16 = 4$;
3) $\log_a 1 = 0$.

848. Leidke arv, kui tema kümnendlogaritm on

1) 4,256;
2) 0,9728;
3) –2,3276;
4) –0,8632.

849. Leidke.

1) $\log_{100} 26{,}3$;
2) $\log_3 27000$;
3) $\log_2 0{,}0532$;
4) $\log_4 810$;
5) $\log_{0,08} 80$;
6) $\ln 5203642$.

850. Arvutage.

$\log_2 16 - \log_3 81 + \log_5 5 + \log 10 + \ln e$.

851. Logaritmige avaldist y, kui

1) $y = 125x\sqrt[5]{x^3}$;
2) $y = ax^7\sqrt{ax}$;
3) $y = 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{6}}c^8$;
4) $y = 100x^{7,3}z^{0,05}$.

852. Potentseerige järgmine võrdus.

1) $\log x = 2\log a + 3\log b$;
2) $\log z = -\log x$;
3) $\log x = 4\log(a+b) + \log c$;
4) $\log u = \log(a^3 - 1) - 1$;
5) $\log y = \log(x - a^2) + \frac{2}{7}\log(x^2 - a)$;
6) $\log v = 4 - \log e$.

853. Leidke funktsiooni määramispiirkond.

1) $y = \log(6x - 5)$;
2) $y = \log x^2$;
3) $y = \log(2x^3 + 3x)$;
4) $y = \ln x^3$;
5) $y = \ln\frac{3x}{2x-4}$;
6) $y = \log\frac{2x+1}{-x^2-1}$.

854. Leidke funktsiooni pöördfunktsioon.

1) $y = 0{,}25^{x}$;
2) $y = 4 + \log_2 x$;
3) $y = 3\ln x$.

855. Selgitage, kumb on suurem, kas

1) $\log_4 10$ või $\log_4 8$;
2) $\log a$ või $\log a^2$;
3) $\log 0{,}22$ või $\log 1$;
4) $\log_{0,8} 4$ või $\log_{0,8} 6$.

856. Lahendage võrratus.

1) $\log_8 x > 0$;
2) $\log x > 0$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} x < 0$;
4) $\log_{0,6} x < 0$;
5) $\log_6 x < 0$;
6) $\log_{0,9} x > 0$.

857. Lahendage võrrand.

1) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5{,}5$;
2) $\log(6 - 7x) = \log 20$;
3) $\log_{0,5} x - \log_{0,25} x + \log_2 x = 3$;
4) $\log x + \log(x-3) = 1$;
5) $\log^{\frac{2}{5}} x - 26\log_5 x + 25 = 0$;
6) $\log_2 x + \log_x 2 = 2$;
7) $\log_{0,3} x(\log_{0,3} x - 1) = 2$;
8) $\log^2 x - 6 = \log x$.

858. Lapse keskmine pikkus sõltub vanusest tabelis esitatud viisil:

Vanus aastates	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pikkus cm-tes	50	70	80	88	95	100	107	113	119	127	129

Konstrueerige nende andmete põhjal vastav graafik. Leidke lapse pikkuse sõltu vus vanusest kujul $y = ax^b + c$. Arvutage lapse pikkus, kui vanus on 2,5 aastat 5 aastat; 8,5 aastat. Võrrelge tulemust joonisega.

859. Toodangu mahu kasvukoefitsient aastal i kohta arvutatakse valemiga

$$x_i = \frac{t_i}{t_{i-1}},$$

kus t_i on toodangu maht aastal i ja t_{i-1} on toodangu maht eelneval aastal. Suhe x_i esitatakse ka protsentides. Osutub, et n järjestikuse aasta jooksul o toodangu mahu keskmine kasvukoefitsient aastas (x_g) võrdne nende aastat kasvukoefitsientide geomeetrilise keskmisega, s.t.

$$x_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Aasta (i)	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Toodangu kasvukoefitsient (x_i)	1,08	1,06	1,01	1,06	1,06	1,10

Tabelis on antud ühe ettevõtte toodangu mahu kasvukoefitsiendid erinevatel aastatel. Mitmekordseks kasvas keskmine aastatoodang selles ettevõttes ajavahemikul 1990–1995?

860. Konstrueerige funktsiooni graafik piirkonnas $-2\pi \le x \le 2\pi$:

1) $y = 2\cos x$; 2) $y = 2 + \cos x$; 3) $y = \frac{1}{2}(\sin x + 1)$;

4) $y = |\sin x|$; 5) $y = \sin x - 1$; 6) $y = |\sin x| - 1$.

861. Kasutades graafikuid, leidke eelmises ülesandes esitatud funktsioonide 1) nullkohad; 2) positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad; 3) kasvamis- ja kahanemispiirkonnad; 4) ekstreemumpunktid. Milline antud funktsioonidest on paaris, milline paaritu?

862. Arvutage.

1) $\sin(\arcsin 0,7)$; 2) $\cos(\arcsin 0,12)$;

3) $\tan(\arcsin 0,5)$; 4) $\tan(\arccos 1)$;

5) $\sin(\arccos 0,6)$; 6) $\sin(\arctan 4,3)$;

7) $\sin(\arcsin 0,4 + \arcsin 0,9)$; 8) $\cos(2\arccos 0,5 - \arcsin 0,5)$.

863. Lahendage võrrand.

1) $\cos x = 0,2761$; 2) $\sin(x + \pi) = 0,4434$;

3) $\tan 3x = 1,756$; 4) $\cos(4x - \pi : 3) = 0,9377$;

5) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0,9511$; 6) $\tan\left(\frac{\pi}{12} - 3x\right) = 6,314$;

7) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$; 8) $4\cos^2 x + 17\sin x - 8 = 0$;

9) $\tan^2 x - 5\tan x + 6 = 0$; 10) $\tan^2 x = 2\tan x$;

11) $\sin^2 x = 2\sin x$; 12) $2\cos^2 x = \sqrt{2}\cos x$.

864. Lahendage võrrand.

1) $\sin x - \cos 2x = 0$; 2) $\sin x = \sin 3x$;

3) $2\tan^2 x - \tan x - 6 = 0$; 4) $\tan^2 x - 4\tan x + 3 = 0$;

5) $\sin 4x\cos 3x - \cos 4x\sin 3x = 1$; 6) $\sin 2x\cos 2x = -0,5$;

7) $\sin 5x + \sin 3x = 0$; 8) $\sin 2x(\sin 2x + 2) = 3$;

9) $\tan 3x\cos x - \tan 3x = 0$; 10) $\sin^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 x = 0$;

11) $\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = 0$; 12) $\sin^3 x - \tan^3 x = 0$.

865. Leidke funktsiooni nullkohad.

1) $y = \cos\left(5x + \frac{\pi}{8}\right)$; 2) $y = \frac{3}{5} + \sin 2x$.

866. Millistel argumendi väärtustel ei ole määratud funktsioon

1) $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$; 2) $y = \frac{\cos x}{2 + \sin^2 x}$?

867. Lahendage võrrand.

1) $\cos 2x = \cos x$;

2) $\sin 5x\cos 3x = \sin 3x\cos 5x$;

3) $5\sin 2x\cos 2x + 11\cos^2 2x = 0$;

4) $(\sin x - \cos x)^2 = \sin 2x$;

5) $\sin(34° + x)\sin(56° - x) = 0,25\sqrt{2}$;

6) $\sin 4x\cos x = 0,5\sin 5x$;

7) $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$;

8) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0,5$.

868. Leidke funktsiooni positiivsuspiirkond.

1) $y = 2\sin x + 3$; 2) $y = 5 - \tan x$;

3) $y = 2\cos x - 2$; 4) $y = 4\sin x$.

869. Leidke piiväärtus.

1) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \sin x$; 2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{9}} \tan x$; 3) $\lim\limits_{x \to 2,8} \cos 5x$;

4) $\lim\limits_{x \to -3} 7^x$; 5) $\lim\limits_{x \to -4}(16 - x^2)$; 6) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{7x + 7}{x + 1}$;

7) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{x + 1}$; 8) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2 - 6x}{4x^5 + 2x}$; 9) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{12x^4 + 10}{2x + 4}$.

870. Leidke piirväärtus.

1) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 5x}$; 2) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 2}$; 3) $\lim\limits_{x \to 2,5} \frac{2x - 5}{x^2 - 4x + 3}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^4 - 2x^3 + x}{2x^2}$; 5) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$; 6) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - 2}$.

871. Leidke piirväärtus.

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3 + x^3}{4x^4 + 5}$; 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x + 1}{3x + 8}$;

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{9x^5}{8x^4 - 7x^2}$; 4) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{10x + 1}{5x}$.

872. Leidke antud funktsiooni muudu üldavaldis.

1) $y = -3x^2 + 2x + 5$;
2) $y = 4x + \frac{5}{x}$;
3) $y = \ln(7x + 6)$;
4) $y = -6x$.

873. Arvutage eelmise ülesande andmetel funktsiooni muut

1) kohal 2, kui $\Delta x = 1$;
2) kohal 0, kui $\Delta x = 0{,}1$.

874. Milline üle-eelmises ülesandes esitatud funktsioonidest ei ole pidev kohal 0?

875. Diferentseerige funktsiooni.

1) $y = \frac{3}{2x}$;
2) $y = \frac{x}{3}$;
3) $y = \frac{4x - 9}{5}$;
4) $y = 3\ln x$;
5) $y = \log_9 x$;
6) $y = 4\sqrt{x}$;
7) $y = -\sin x$;
8) $y = 4^x$;
9) $y = 2^{-x}$.

876. Diferentseerige funktsiooni.

1) $y = \frac{3}{x} - \frac{x}{3}$;
2) $y = x^4 \cdot \frac{1}{x}$;
3) $y = \frac{x}{\sqrt{x}} - x^3$;
4) $y = \frac{3x - 4}{2 - 5x}$;
5) $y = x^8 \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[8]{x^7}$;
6) $y = x^3 \cdot \ln x$.

877. Diferentseerige funktsiooni.

1) $y = \sqrt{5x + 3}$;
2) $y = (12x^3 + 4x^2 + 1)^{31}$;
3) $y = \log x^9$;
4) $y = 3^{x^4 - x^2 + 8x + 5}$;
5) $y = \sin 5x$;
6) $y = \tan(7x^2 - 0{,}3x^3)$;
7) $y = 4\sqrt{x^2 + 6}$;
8) $y = \arctan\sqrt{x}$.

878. Leidke funktsiooni tuletis kohal x_0.

1) $y = 5^{-x}$, $x_0 = 2$;
2) $y = \log(4 - x^2)$, $x_0 = 1$;
3) $y = \sin(4 - 3x)$, $x_0 = -2$;
4) $y = \arccos 2x^3$, $x_0 = 0{,}7$.

879. Masspunkt liigub sirgjooneliselt seaduse $s = 0{,}2t^3 - 3t^2 + 16t$ järgi. Leidke selle punkti liikumiskiiruse valem. Mida tähendab see, et $t = 0$ korral on $s = 0$, kuid $v = 16$? Leidke punkti kaugus lähtekohast ja hetkkiirus, kui 1) $t = 0{,}1$, 2) $t = 3$, 3) $t = 5$, 4) $t = 0$. Millisel ajamomendil kogu liikumise ajal on kiirus kõige väiksem? Kui suur see on?

880. Masspunkti liikumisseadus sirgel on $s = 0{,}4t^2 + 4t + 2$. Leidke punkti liikumiskiiruse valem. Arvutage s ja v, kui $t = 0$. Mida saate tulemusest järeldada? Kuidas muutub kiirus kogu liikumisaja jooksul? Arvutage punkti poolt läbitud tee ja kiirus, kui 1) $t = 5$ ja 2) $t = 8$.

881. Leidke funktsiooni graafiku puutuja tõusunurk kohal x_0.

1) $y = \ln(x^2 - 3x)$, $x_0 = 0{,}75$;
2) $y = 5^{-x^2}$, $x_0 = -1{,}5$.

882. "Kivisööjate" arv $N(t)$ suureneb vastavalt seadusele $N(t) = 2t^2 + 32t + 210$, kus t on aeg päevades. Kui suur on "kivisööjate" arv esimese päeva lõpuks? Kui suur on "kivisööjate" juurdekasvu kiirus neljandal päeval?

883. Hetkel, kui ruudu pindala on 4 m^2, kasvab tema külje pikkus kiirusega 0,01 $\frac{m}{s}$. Kui kiirelt kasvab samal hetkel ruudu pindala?

884. Hetkel, kui ringi pindala kasvab kiirusega 40π $\frac{cm^2}{min}$, on ringi raadius 10 cm. Kui kiirelt kasvab samal hetkel ringi raadius?

885. Leidke joonele $y = 3x^2 - x^3$ punktis (1; 2) joonestatud puutuja võrrand.

886. Leidke joone $y = x^2 - x + 4$ sellise puutuja võrrand, mis moodustab x-telje positiivse suunaga nurga 45°.

887. Millises punktis lõikab y-telge parabooli $y = x^2$ selline puutuja, mis on paralleelne sirgega $y = 0{,}5x - 1$?

888. Leidke parabooli $y = -\frac{1}{4}x^2$ selliste puutujate võrrandid, mis läbivad punkti (1; 2).

889. Näidake, et funktsioon $y = 4x^3 - 6x^2 + 3x + 1$ on kogu oma määramispiirkonnas kasvav.

890. Näidake, et võrrandil $x^3 + x^2 + x + 2 = 0$ on vaid üks reaalarvuline lahend.

891. Leidke parameetri a selline väärtus, mille korral funktsiooni $y = a + x - x^2$ maksimum on 11,25.

892. Leidke funktsiooni $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ suurim ja vähim väärtus lõigul [0; 2].

893. Kaupmees kavatses müüa päevas 20 kg õunu hinnaga 7 krooni kilogramm. Sellisel juhul oleks ta iga müüdud kilogrammi õunte pealt teeninud endale 2 krooni. Hiljem arvas ta aga, et iga 10-sendine kilohinna alandamine suurendab päevast läbimüüki 2 kg võrra. Millise hinnaga tuleks kaupmehel õunu müüa, et tema kogutulu oleks võimalikult suur?

894. Leidke selline arv, mille summa tema ruuduga on vähim võimalikest sellistest summadest.

895. Kahe arvu korrutis on 144. Leidke need arvud selliselt, et nende summa oleks minimaalne.

896. Aken on kujult ristkülik, mille ülemisele küljele toetub võrdkülgne kolmnurk. Milline peab olema akna alus, et teda saaks läbida maksimaalne hulk valgust, kui akna ümbermõõt on 3 m?

897. Võrdhaarse kolmnurga aluse ja kõrguse summa on s. Kolmnurk pöörleb oma kõrguse ümber. Missugune seos peab olema aluse ja kõrguse vahel, et tekkinud pöördkeha ruumala oleks maksimaalne?

898. Leidke punkti (2; 0) kaugus sirgest $y = 2x - 1$.

899. Punkt A liigub mööda sirget vastavalt seadusele $s(t) = 4t^3 - 12t^2 + 1$, kus $t \geq 0$. Uurige funktsiooni $s(t)$ ja skitseerige tema graafik. Millist informatsiooni punkti liikumise kohta saame sellelt graafikult?

900. Uurige funktsiooni ja skitseerige tema graafik. Mitu nullkohta on funktsioonil?

1) $y = x^3 - 3x + 2$; 2) $y = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$.

901. Leidke funktsiooni $y = f(x)$ graafiku rõht- ja püstasümptoodid.

1) $y = \dfrac{x}{x^3 - 1}$; 2) $y = \dfrac{4x^2 + 1}{x^2 - 9}$; 3) $y = \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 + 8}$.

902. Uurige funktsiooni, skitseerige graafiku asümptoodid ja graafik.

1) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$; 2) $y = 3 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{4}{x^2}$; 3) $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$.

903. Leidke arvutustest tingitud absoluutne viga, kui mõõtmistulemus on 8 (±0,1) cm ja arvutused sooritati valemi $y = x^2 + 2x$ järgi.

904. Korrapärase kuusnurga külje mõõtmisel saadi tulemus 5 (±0,01) cm. Leidke kuusnurga pindala arvutamisel tehtav absoluutne ja suhteline viga.

905. Leidke võrrandile $x^3 + 3x - 1 = 0$ lahendite täisarvulised lähendid ja täpsustage neid Newtoni meetodiga sajandike täpsuseni.

Vastused

2. –36; 49; –64. **3.** 3) –1; –6; –27; –60; –155; 4) 5; 15; 29; 47; 69. **5.** 1) $2n + 2$; 2) $6n$; 3) $6n + 18$; 4) $3n + 1$; 5) $7n + 4$. **6.** 7. **7.** 1) 11.; 2) 5.; 3) 10.; 4) 17. **8.** 1) 3; 2) 8; 3) 13; 4) 4. **9.** 1) 5; 2) 11; 3) sellist liiget ei leidu. **10.** 1) $n + 3$; 2) $-2n$; 3) $(-1)^{n+1}$; 4) $\dfrac{2n-1}{2n}$; 5) $(-1)^n 2n$; 6) $\dfrac{3n-1}{3n}$. **11.** $S = 2n^2$. **13.** 1) 2; –3; –8; –13; –18; 2) 1; 0,5; 0,25; 0,125; 0,0625; 3) 4; 15; 224; 50175; 2517530624; 4) 1; 1; 2; 3; 5. **14.** Jada liikmed hakkavad korduma: $a_7 = a_1$; $a_8 = a_2$; …; $a_{k+6} = a_k$; $a_{1997} = a_5 = \dfrac{1}{3}$. **15.** 3) Avaldage iga liige alates teisest kahe järgneva liikme kaudu ja leidke siis tõestatava võrduse vasakul pool olev summa; 4) liikmed, mille järjekorranumber jagub 4-ga. **17.** 2. 1) $\dfrac{n^2}{n+1}$; 2) $\dfrac{2n}{3}$; 3) $5n + 2$. **18.** Tõkestatud on jadad 1, 4, 5 ja 6. 1) 1,5; 2) ∞; 3) $-\infty$; 4) 1; 5) 0; 6) 2. **19.** 1. 1) 3501.; 2) 45.; 3) 101.; 4) 1001.; 2. hääbuvad. **20.** 1) 2001; 2) 20000; 3) 2500; 4) 101. **21.** 3. 1) $2n - 1$; 2) $16 - 4n$; 3) $-5 + 3n$; 4) $0{,}25n$. **22.** 1) $d = -6$; 4) $d = 6$. **23.** 1) 3; 7; 11; 15; 19; 2) 5; 3; 1; –1; –3; 3) 0,8; –0,4; –1,6; –2,8; –4; 4) –4; –7; –10; –13; –16; 5) $-\dfrac{1}{3}$; 0; $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{2}{3}$; 1; 6) –16; –8,75; –1,5; 5,75; 13. **24.** 1) 28,5; $1{,}5n$; 2) –21; $17 - 2n$; 3) 19; $-9{,}5 + 1{,}5n$; 4) pole aritmeetiline jada. **25.** 1) –1,2; 2) 7,5; 3) 3; 4) –1,5; 5) 10; 6) 13. **26.** 2) 1., 4. ja 6., neid määravad lineaarfunktsioonid; 4) aritmeetiliseks jadaks nimetatakse lineaarfunktsiooni väärtuste jada, kus argument omandab järjestikuseid naturaalarvulisi väärtusi alates 1-st. **27.** 10,5 m. **28.** 6 h. **29.** 1) $a_1 = 48$, $d = 6$; 2) $a_1 = 140$, $d = -10$; 3) $a_1 = 7$, $d = 5$; 4) $a_1 = 2$, $d = 3$ või $a_1 = 14$, $d = -3$. **30.** 5420°. **31.** 11, 15, 19, 23, 27, 31. **32.** 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5. **33.** Iga liige alates teisest on oma naaberliikmete aritmeetiline keskmine. **35.** Esimese 30 liikme korral. **36.** Vaadelge järjestikuste liikmete vahesid. **38.** 1) 100; 2) –195; 3) 110; 4) 187,5. **39.** 1) –135; 2) 238,7; 3) 98; 4) 32,5; 5) –90; 6) –360. **40.** 396. **41.** 128; 70336. **42.** Kasutage aritmeetilise jada summa valemit. **43.** 26. sekundil; 10 s; 122,5 m. **44.** 1 065 000 kr., 1 080 000 kr. **45.** 700 kr.; 115 500 kr. **46.** 15 rida, 15 toru, 2,6 m. **47.** 17. **48.** 14^{00}. **49.** 98730. **51.** 2360. **52.** $p + q - n$; $\dfrac{2p + 2q - n - 1}{2} \cdot n$. **53.** 11. **54.** 5, 8, 11, 14 ja 17 a. **55.** 3) 2^{n-1}; 2^{2-n}; -3^n; $-3 \cdot (-2)^{n-1}$. **57.** 4) $|q| > 1$; 5) $|q| \leq 1$; 6) 0; 7) 0. **58.** 1) 32; 2^{n-1}; 2) –486; $2 \cdot (-3)^{n-1}$; 3) –128; $0{,}125 \cdot (-4)^{n-1}$; 4) –0,3125; $-10 \cdot 0{,}5^{n-1}$; 5) $\dfrac{81}{1250}$; $-\dfrac{5}{6} \cdot \left(-\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$; 6) 0,00051; $51 \cdot 10^{1-n}$; 7) $72\sqrt{3} + 108\sqrt{6}$; $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{6})^{n-1}$. **59.** 1) 5; 2) 7500; 3) –7; 4) 5,625; 5) $\dfrac{8}{3}$; 6) –3. **60.** 1) ±768; 2) –6561; 3) 0,125; 4) $0{,}25 \cdot 10^{-5}$. **61.** 24; 72. **62.** 9; 13,5; 20,25. **63.** 0,076 m. **64.** 4 cm. **65.** $3 \cdot 2^{17} = 393216$.

66. 269 tm. **67.** 1480 kr. **68.** 1,24 miljardit. **69.** 4) Iga liige alates teisest on oma naaberliikmete geomeetriline keskmine; 5) vaid positiivsete liikmetega jadas; mistahes geomeetrilises jadas kehtib seos $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$. **70.** 3, 6, 12 või 12, 6, 3. **71.** 64, 32, 16, 8, ... **72.** 9 m, 12 m, 16 m. **73.** 4, 12, 36, 60. **74.** 2, 4, 8, 16. **75.** 2, 6, 18 või 18, 6, 2.

77. 1) 93; 2) 7,875; 3) 20; 4) $\frac{5115}{512}$. **78.** 1) –63; 2) $\frac{19285}{16} = 1205{,}3125$; 3) 195; 4) 1,96875. **79.** 6. **80.** 4. **81.** 1) 9841; 2) 1023; 3) $\frac{255}{128}$; 4) 2731; 5) $\frac{x^{101}-1}{x-1}$; 6) $\frac{1-x^{16}}{1+x}$.

82. 6 m.

83. 786429. **84.** 2^{52}; $2(2^{52}-1)$, kui aastas on 52 esmaspäeva. **86.** 36, 12, 4 või 4, 12, 36.

87. 3, 7, 11. **88.** 931. **89.** 31, 31, 31 või 3, 15, 75. **91.** 1) 1; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{20}{9}$; 5) $\frac{10}{9}$; 6) $4(\sqrt{2}+1)$; 7) $38\frac{1}{9}$; 8) –1,125; 9) ei ole geomeetriline jada; 10) $\frac{7\sqrt{7}}{8}$. **92.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{4}{11}$; 3) $\frac{85}{99}$; 4) $5\frac{7}{30}$; 5) $1\frac{19}{55}$; 6) $2\frac{188}{333}$. **93.** 1) 2; 2) $\frac{4}{3}$; 3) 2; 4) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. **94.** $\frac{5}{6}$.

95. 9 või 12. **96.** 900. **97.** 32. **98.** 6 m. **99.** 5; 0,5. **100.** $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. **101.** $1+\sqrt{2}$. **102.** 25.

103. 1) $2\pi(2+\sqrt{2})$; 2) 2π; 3) 4. **105.** 2) ja 3) $\frac{3}{2n-1}$; 4) $\frac{n+1}{3n+8}$; 5) $\frac{|5-n|}{n+1}$; 6) $\frac{n^3}{n^2+3}$; 7) $\frac{1}{n+7}$; 8) $\frac{2n-1}{n}$. **106.** 1) (–1; 3); 2) $(-\infty; 0{,}4)\cup(0{,}8; \infty)$; 3) $(-\infty; 0)\cup(0; 0{,}5)$; 4) $(-\infty; -3)\cup(-3; -2{,}5)$; 5) $(-\infty; -1{,}4)\cup(-0{,}6; \infty)$; 6) $(-\infty; -201)\cup(199; \infty)$. **107.** 1) 2001; 2) 2000; 3) 55; 4) 32. **109.** 1) 10002; 2) 2001; 3) 4167; 4) 30000. **112.** 1) 2; 2) 1; 3) 0; 4) ∞; 5) 0; 6) ∞; 7) $-\infty$; 8) 0; 9) ∞. **113.** 1) 1; 2) 0; 3) 3; 4) –1; 5) 0,25; 6) 3,5; 7) 0,5; 8) 1; 9) 1; 10) 1; 11) ∞; 12) 0. **115.** 1) 2; 2) –0,25; 3) 0; 4) 0; 5) 0; 6) 3. **116.** 1) 1; 2) 3. **118.** 1) 2π cm, $2\sqrt{2}\pi$ cm, π cm^2, 2π cm^2; 2) $0{,}6\sqrt{2}\pi$, $1{,}2\pi$, $0{,}18\pi$, $0{,}36\pi$; 3) $2{,}5\sqrt{2}\pi$, 5π, $3{,}125\pi$, $6{,}25\pi$; 4) 6π, $6\sqrt{2}\pi$, 9π, 18π; 5) $0{,}7\pi$, $0{,}7\sqrt{2}\pi$, $0{,}1225\pi$, $0{,}245\pi$. **119.** $0{,}75\sqrt{3}R^2$.

120. $3\sqrt{3}r^2$. **121.** 1) ja 2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **123.** 1) 64%; 2) 83%; 3) 95%. **124.** 1) 40%; 2) 9%.

125. 1) $0{,}5(\pi-2)a^2$; 2) $0{,}5(\pi-2)a^2$; 3) $0{,}25(4-\pi)a^2$. **126.** $0{,}5(a+b-c)$. **129.** 64 dm^2. **130.** Jõudis, kui oli jooksnud $111\frac{1}{9}$ m. **132.** 1) $2n-1$; 2) $2n+8$; 3) $3n+3$; 4) $3n+8$. **136.** 1) 2000; 2) 32. **137.** 1) 332; 2) 144; 3) 1002. **139.** 11. **140.** 13. **141.** 44.

142. 4905. **143.** 6300 m; 82,55 km. **144.** 9,2 s. **146.** –4; –2; –1. **147.** 1) $-\frac{5}{3}$; 2) $\pm\frac{4}{3}$.

148. 2; 6. **149.** 384. **150.** 53 mm. **151.** $2a^2$. **152.** 0,125. **154.** 1) 0; 2) 0,5; 3) –3;

4) ∞; 5) 0; 6) 0. **155.** $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$, $\frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$, $\frac{16\pi}{3}$, $\frac{64\pi}{3}$. **156.** π, $\frac{\pi}{4}$. **157.** $H = 12k$.

158. $h = 0{,}5\sqrt{3}a$. **159.** $p = 35t$. **161.** 1) 2; 2) 1; 3) –3; 4) –1. **162.** $a = \frac{40}{h}$.

164. $t = \frac{600}{v}$. **166.** Võrdelised tabelites 2, 3 ja 4; pöördvõrdelised tabelites 5 ja 6.

167. 1) 4 ja 2 h; 2) 20 ja 30 km; 3) 5 ja 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$; 4) 3; 5) 4 ja 1,5 h. **168.** 1) 3 h, 4,5 h; 2) 150 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$; 3) 300 km; 4) vähemalt 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **169.** 39, 20, 17, 9, 8 ja 8 kohta.

170. 180 kr., 210 kr., 270 kr. **171.** 13,2 g. **172.** 24; 8; 4,8; $\frac{48}{x}$. **173.** $v_2 = \frac{18}{5}v_1$; 18 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

174. $m = 10{,}6 - 0{,}2t$. **175.** $l = 5 + 0{,}5p$. **176.** $k = 82{,}2 + 1{,}2t$. **179.** Mida suurem on $|a|$, seda väiksema teravnurga moodustab sirge y-teljega. **180.** 1) 2 ja 4; 2) 1 ja 2; 1 ja 4; 3) 3 ja 5; 4) 2 ja 5; 5) 3 ja 4; 6) 2, 3 ja 4; 7) 1; 8) 1 ja 5. **182.** $S = 0{,}5a^2$. **183.** $S = 50x - x^2$. **184.** 1) nullkohad: –6 ja 1; $x_h = -3{,}5$; $y > 0$, kui $x < -6 \vee x > 1$; $y = -10$, kui $x = -4$ või $x = -1$. **187.** Võrdsed paraboolid, mis erinevad vaid asendi poolest koordinaatteljestikus. **188.** $y = x^2 - 2x$; asub. **189.** $t = 10$; 50 m. **190.** $5 + \sqrt{26} \approx 10$ s; 130 m. **191.** 1a) $m > 11$; 1b) $m < 11$; 2a) $m > \frac{1}{3}$; 2b) $m < \frac{1}{3}$, $m \neq -1$; 3a) $1 < m < 17$; 3b) $m < 1 \vee m > 17$; 4a) lahend puudub; 4b) $m > -\frac{1}{3}$, $m \neq 1$. **195.** 1) $(-\infty; \infty)$; 2) $(-\infty; \infty)$; 3) $(-\infty; 8]$; 4) $[-2; \infty)$; 5) $(-\infty; -1)\cup(-1; \infty)$; 6) $(-\infty; -1)\cup(-1; 0)\cup(0; \infty)$; 7) $(-\infty; -1)\cup(-1; 1)\cup(1; \infty)$; 8) $(7; \infty)$; 9) $(-\infty; -6]\cup(0; \infty)$; 10) $(-\infty; 1]\cup[2; \infty)$; 11) $(-\infty; -1)\cup(1; \infty)$; 12) $[-1; 1]$. **196.** 1) $[0; \infty)$; 2) $(-\infty; -2)\cup[0; 1]$; 3) $(-3; 0)\cup(0; \infty)$; 4) $[5; \infty)$;5) $(-1; 2)\cup(2; 3]$; 6) $(-\infty; -5]\cup[0; 6)$. **197.** Tabelites 2, 4 ja 5.

200. 1) $s = 0{,}007v^2$; 2) 44,8 m; 84,7 m; 3) 94 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$; 59 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **201.** 1) 7,5 h; 2 h; 2) 5 km; 3) 2 h; 3,5 h; 4) $X = [8; 15{,}3]$; $Y = [0; 25]$. **202.** $S = 50x - x^2$; $X = (0; 50)$; $Y = (0; 625)$.

204. $V = 4x(6-x)(4-x)$; $X = (0; 4)$. **205.** $y = \begin{cases} 10x, \text{ kui } 0 < x \le 100 \\ 300 + 7x, \text{ kui } x > 100 \end{cases}$.

206. $C = \frac{4x^2 + \pi x^2 + 192}{4x}$. **208.** 4) $X = (-\infty; 0)\cup(0; \infty)$; $X_0 = \{-2; 2\}$; $X^+ = (-2; 0)\cup(2; \infty)$; $X^- = (-\infty; -2)\cup(0; 2)$; 5) $X = (-\infty; 0)\cup(0; \infty)$; $X_0 = \{0, 2\}$; $X^+ = (-\infty; 0)\cup(0, 2; \infty)$; $X^- = (0; 0, 2)$; 6) $X = (-\infty; \infty)$; $X_0 = \{-2; 0; 7\}$; $X^+ = (-2; 0)\cup(7; \infty)$; $X^- = (-\infty; -2)\cup(0; 7)$; 7) $X_0 = \{-5; 2, 5\}$, $X^+ = (-\infty; -5)\cup(2, 5; \infty)$; $X^- = (-5; 2, 5)$; 8) $X_0 = \{-3; 0, 5\}$, $X^+(-3; 0, 5)$, $X^-(-\infty; -3)\cup(0, 5; \infty)$; 9) $X_0 = \varnothing$, $X = X^+ = (-\infty; \infty)$, $X^- = \varnothing$; 10) $X = (-\infty; \infty)$;

$X_0 = \{1, 2\}$; $X^+ = (-\infty; 1,2) \cup (1,2; \infty)$; $X^- = \varnothing$; 11) $X = (-\infty; \infty)$; $X_0 = \left\{\frac{2}{3}; 2\right\}$;

$X^+ = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (2; \infty)$; $X^- = \left(\frac{2}{3}; 2\right)$; 12) $X = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; \infty)$; $X_0 = \{7\}$;

$X^+ = (-3; 3) \cup (7; \infty)$; $X^- = (-\infty; -3) \cup (3; 7)$. **209.** $m < -0,5$. **210.** $a > \frac{5}{3}$.

211. $-2 < a < 2$. **212.** 3) $X \uparrow = (1; 5)$; $X_1 \downarrow = (-\infty; 0)$; $X_2 \downarrow = (5; \infty)$; $x_{min} = 1$; $x_{max} = 5$;
4) $X \uparrow = (-\infty; 0)$; $X \downarrow = (0; \infty)$; $x_{max} = 0$. **213.** 1) $X \uparrow = \mathbf{R}$; 2) $X \downarrow = \mathbf{R}$; 3) $X \downarrow = \mathbf{R}$;
4) $X \uparrow = \mathbf{R}$; 5) $X \downarrow = (-\infty; 2,5)$; $X \uparrow = (2,5; \infty)$; $x_{min} = 2,5$; 6) $X \uparrow = (-\infty; 1,5)$;
$X \downarrow = (1,5; \infty)$; $x_{max} = 1,5$; 7) $X \uparrow = (-\infty; 3)$; $X \downarrow = (3; \infty)$; $x_{max} = 3$; 8) $X \uparrow = (-1; \infty)$;
$X \downarrow = (-\infty; -1)$; $x_{min} = -1$; 9) $X_1 \downarrow = (-\infty; 0)$; $X_2 \downarrow = (0; \infty)$; 10) $X_1 \uparrow = (-\infty; 0)$;
$X_2 \uparrow = (0; \infty)$. **214.** 7) $X = \mathbf{R}$; $Y = \left[\frac{4}{3}; \infty\right)$; $X_0 = \varnothing$; $X^+ = \mathbf{R}$; $X \uparrow = \left(\frac{4}{3}; \infty\right)$;

$x_{min} = \frac{4}{3}$; 8) $X = \mathbf{R}$; $Y = [-1; \infty)$; $X_0 = \{0,25\}$; $X^+ = (-\infty; 0,25)$; $X \uparrow = \varnothing$;
$X \downarrow = (-\infty; 0,5)$, ekstreemumid puuduvad. **217.** 1) $X = \mathbf{R}$; $Y = [0; \infty)$;
$X^+ = (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; \infty)$; $X_e = \{1; 1,5; 2\}$; $X_1 \uparrow = (1; 1,5)$; $X_2 \uparrow = (2; \infty)$; 2) $X = \mathbf{R}$;
$Y = [0; \infty)$; $X_0 = \{-1; 2,5\}$; $X^- = \varnothing$; $X_e = \{-1; 0,75; 2,5\}$; $X_1 \downarrow = (-\infty; -1)$;
$X_2 \downarrow = (0,75; 2,5)$; 3) $Y = [-58,25; \infty)$; $X_0 = \{-13,13; 2,13; 4; 7\}$;
$X^- = (-13,13; 2,13) \cup (4; 7)$; $X_1 \uparrow = (-5,5; 2,5)$; $X_2 \uparrow = (5,5; \infty)$; 4) $Y = [5,3; \infty)$;
$X_0 = \varnothing$; $X^+ = \mathbf{R}$; $X \uparrow = (-2,3; \infty)$; $X \downarrow = (-\infty; -2,3)$; $x_{min} = -2,3$; 5) $X = Y = \mathbf{R}$;
$X_0 = \{-1,5\}$; $X^- = (-1,5; \infty)$; $X \uparrow = (-0,25; 0,5)$; 6) $X = Y = \mathbf{R}$; $X_0 = \{0; 1\}$;
$X^- = (0; 1) \cup (1; \infty)$; $X \uparrow = (0,5; 1)$; $X_e = \{0,5; 1\}$. **218.** (1; 1).

220. 5) $X = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$; $Y = (0; \infty)$; $X_0 = \varnothing$; $X^+ = X$; $X^- = \varnothing$; $X \uparrow = (-\infty; 0)$;
$X \downarrow = (0; \infty)$; 6) $X = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$; $Y = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$; $X_0 = \varnothing$; $X^+ = (0; \infty)$;
$X^- = (-\infty; 0)$; $X \uparrow = \varnothing$; $X \downarrow = X$. **227.** Kõigil juhtudel punkt (2; –1).

228. 1) $y = -3x - 1$; 4) $y = -x^2 + x + 6$; sama funktsiooni saame juhtudel 2, 3 ja 6.

229. Sama funktsiooni saame juhtudel 1 ja 5. **231.** 1) $y = x^3 + 1$; 2) $y = (x-3)^3$;
3) $y = (x-2)^3 + 1$; 4) $y = (x+3)^3 - 2$; 5) $y = 0,5x^3$. **232.** 1) $x_{min} = 3$; 4) $x_{max} = -2$;
6) $x_{min} = 4$. **233.** 1) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$; 2) $(0; \infty)$; 3) –1; 0. **235.** Paarisfunktsioonid on 2, 5, 8, 9 ja 12, paaritud 7 ja 11. **239.** Paarisfunktsioonid. **240.** 1, 3, 4 ja 6. **241.** 2, 3 ja 5.
242. a, e ja f. **243.** 1) $y = -2x - 4$; 2) $y = x^2 + 1$; 3) $y = -\sqrt{0,5x}$; 4) $y = 3x + 15$;

6) $y = \sqrt[3]{x-1}$; 7) puudub; 8) $y = -\frac{1}{8}x - \frac{5}{8}$; 9) $y = \sqrt{x+3}$. **244.** Pöördfunktsioonil
1) $X = [0; \infty)$; $Y = [0; \infty)$; 2) $X = Y = \mathbf{R}$; 3) $X = (-\infty; 4]$; $Y = (-\infty; 0]$;
4) $X = Y = \mathbf{R}$. **245.** Kasvava funktsiooni pöördfunktsioon on kasvav.

246. 1) $X = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$; $Y = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$; 2) $y = \frac{2}{x} + 1$;
3) $X = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$; $Y = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$. **247.** $n \geq 2$; $a \geq 0$. **249.** $X = Y = [0; \infty)$;
$X_0 = \{0\}$; $X^+ = X$; $X \uparrow = X$. **251.** Vaadelge eraldi juhte, kui n on paarisarv ja paaritu
arv. **254.** 1) $y = \sqrt[3]{3x^2 - 5}$; 2) $y = (1-x)^4$; 3) $y = (2x+7)^{100}$; 4) $y = (x^3 - x^2)^{\frac{1}{3}}$;
5) $y = (x-6)^{-2}$; 6) $y = \sqrt{x-6}$. **255.** 1) $y = u^4$; $u = 3x - 1$; 2) $y = \sqrt{u}$; $u = x - 3$;
3) $y = u^3$; $u = x^2 - 4$. **256.** $y = 2\sqrt{x} + 5$, $h = \sqrt{2x+5}$. **257.** 1) $x - 1$; $\sqrt{x^2 - 1}$;
2) $(2x^4 + 1)^8$; $2x^{32} + 1$; 3) $(2x^3 + 4)^{\frac{1}{3}}$; $2x + 4$; 4) $\sqrt{4 - x^4}$; $4 - x^2$. **258.** Kõigil juhtude
$f[f^{-1}(x)] = f^{-1}[f(x)] = x$. **261.** 310 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$; 349 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. **262.** $p = 30 - 4t$; 7,5*h*.

263. $F = 1,8C + 32$. **264.** 50°; $t = 10$. **266.** 1) $(-\infty; \infty)$; 2) $(-\infty; \infty)$; 3) $[0,5; \infty)$;
4) $(-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$; 5) $(-\infty; -1] \cup [0; \infty)$; 6) $(-\infty; \infty)$. **270.** $X = Y = \mathbf{R}$;
$X_0 = \{-2; 1; 3\}$; $X^+ = (-\infty; -1) \cup (1; 3)$; $X^- = (-1; 1) \cup (3; \infty)$; $X \uparrow = (0; 2)$;
$X_1 \downarrow = (-\infty; -1)$; $X_2 \downarrow = (2; \infty)$; $X_e = \{0; 2\}$. **271.** 2) $X = \mathbf{R}$; $Y = [0; \infty)$; $X_0 = \{3\}$;
$X^+ = (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$; $X \uparrow = (3; \infty)$; $X_e = \{3\}$; 7) $X = Y = \mathbf{R}$; $X_0 = \{1\}$; $X^+ = (1; \infty)$;
$X^- = (-\infty; 1)$; $X \uparrow = X$; $X_e = \varnothing$; 9) $X = Y = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$; $X_0 = \varnothing$;
$X^+ = (-\infty; 0)$; $X \downarrow = \varnothing$; $X_1 \uparrow = (-\infty; 0)$; $X_2 \uparrow = (0; \infty)$. **273.** Paaritud on 4 ja 9; paaris
5. **274.** Pöördfunktsioonid: 1) $y = -0,5x + 0,5$; $X = Y = \mathbf{R}$; 2) $y = \sqrt{x-1}$; $X = [1; \infty)$;
$Y = [0; \infty)$; 3) pöördfunktsioon puudub; 4) $y = \sqrt[3]{0,5x}$; $X = Y = \mathrm{R}$. **275.** 1) $y = \sqrt[3]{u}$;
$u = 9 - x^2$; 2) $y = \sqrt{u}$; $u = 3x + 2$; 3) $y = u^{10}$; $u = 5 + x^3$. **276.** Kõigil juhtudel $c \in \mathbf{R}$,
kusjuures 8) $c \neq 8$, 9) kuni 12) $c \neq 0$; 13) ja 14) $c \geq 0$; 16) $c > 0$. **284.** 1) $\sqrt[3]{a}$;
2) $\sqrt[3]{a - b^6}$; 3) $a^4 + a^{-2}$; 4) $\sqrt[3]{x^2 - c^{-2}}$. **286.** 1) 4; 2) –3; 3) –2; 4) $\frac{1}{6}$; 5) –0,5; 6) 0;
7) $2\sqrt{2}$; 8) $\sqrt{2}$; 9) $-\sqrt{2}$; 10) puudub; 11) ±2; 12) puudub. **289.** 7) $a^{\sqrt{2}} < a^{\sqrt{3}}$, kui $a > 1$; $a^{\sqrt{2}} = a^{\sqrt{3}}$, kui $a = 1$; $a^{\sqrt{2}} > a^{\sqrt{3}}$, kui $0 < a < 1$; 8) $a^{-\sqrt{5}} > a^{-\sqrt{7}}$, kui $a > 1$;
$a^{-\sqrt{5}} = a^{-\sqrt{7}}$, kui $a = 1$; $a^{-\sqrt{5}} < a^{-\sqrt{7}}$, kui $0 < a < 1$. **290.** 1) $0 < 2^{-10} < 1$; 2) $-3 < 0$;
3) $-9 < 0$; 4) 1; 5) 1; 6) 0; 7) $6^{0,6} > 1$; 8) $0,8^{-4} > 1$; 9) $0,5^5 < 1$; 10) $2^{0,05} > 1$;
11) suurem ühest, kui $|a| > 1$; väiksem ühest, kui $|a| < 1$; 1, kui $a = 1$; 0, kui $a = 0$;
suurem nullist, kui $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$; 12) suurem ühest, kui $a > 1$; väiksem ühest, kui $a < 1$;
1, kui $a = 1$; suurem nullist, kui $a > 0$; väiksem nullist, kui $a < 0$; 0, kui $a = 0$.
291. 1) $x < 3$; 2) $x \leq 1$; 3) $x \geq 1,5$; 4) $x < 5$; 5) $x < 0$; 6) $x \geq 1$; 7) $x \leq -0,225$; 8) $x > 0,5$;
9) $x < 2$; 10) $x < \sqrt{2}$; 11) $x \in \mathbf{R}$; 12) $x > 2 + \sqrt{2}$; 13) $x \in \mathbf{R}$; 14) lahend puudub;
15) $x > 0$. **295.** 1) 0; –10; 2) ±2; 3) 2; 4) 2; 5) 3; 0; 6) –2; –12; 0; 7) ±1; 0; 8) ±1; –5;
9) 1; 4; 10) ±1; 11) 1; 2; 12) ±1; 5. **296.** 13400,95 kr., 1300 kr.
297. $2000 \cdot 1,07^{40} = 29948,9$ kr. **298.** $2,824295364 \cdot 10^{11}$. **299.** 12800.

300. 5052262149 ≈ 5 100 000 000. **301.** 1) 97,2%; 2) 55,1%; 3) 20,4%. **302.** 25%; 12,5%; 70,7%; 42,5%. **303.** 1) 329541; 2) 217194. **304.** 88,6 senti; 11,4%. **305.** $1000\left(1-\frac{1}{20}\right)^n = 1000\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^n$; 1) 902,5; 2) 568,8. **306.** 8. **307.** 2 000 000. **308.** 8%. **309.** 3768,9 kr. **310.** Liitprotsendiline kasvamine, 10%, 7; liitprotsendiline kahanemine, 20%, 5. **311.** $q = 1 \pm \frac{p}{100}$; 168 cm. **312.** 1) 99,57%; 2) 95,81%; 3) 65,19%; 4) 1,39%; 19,87 g. **313.** 1) 1030; 2) 1002,47; 3) 1000,57. **314.** 2027353,24. **318.** 1) $x > 6$; 2) $x > 2$; 3) $x < 5$; 4) $x < 3$; 5) $x > 3$; 6) $x < 1$; 7) $x < 3$; 8) $x > 2$; 9) $x > 1$; 10) $x < 3$; 11) $x < 4$; 12) $x < 6$; 13) $x > 8$; 14) $x \in \mathbf{R}$; 15) lahend puudub; 16) $x > 0$; 17) $x < 0$; 18) $x > 0$. **319.** 8,7; 15; 19,7; 45; 135; 100; 57,7; 33,3; 3,7; 1,23. **320.** 129,6; 170,4; 268,7; 387,0; 464,4. **321.** 1) $X = \mathbf{R}$, $X^+ = X$, $X^- = \varnothing$, $X\uparrow = X$, $X\downarrow = \varnothing$; $X = \mathbf{R}$, $X^+ = (-2,7; \infty)$, $X^- = (-\infty; -2,7)$, $X\uparrow = X$, $X\downarrow = \varnothing$; 2) sama, mis $y = 0{,}55^x$ korral; $X = \mathbf{R}$, $X^+ = (-\infty; 0)$, $X^- = (0; \infty)$, $X\uparrow = \varnothing$, $X\downarrow = X$. **324.** 204,6. **326.** 1) $a_1 = 4$, $q = 4$; 2) $a_1 = 6$, $q = 3$; 3) $a_1 = -6$, $q = 2$; 4) $a_1 = 0{,}1$, $q = 0{,}1$; 5) $a_1 = 20$, $q = 0{,}2$; 6) $a_1 = -\frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$. **328.** 1) $y = 5^x$, $x \in \mathbf{N}$; 2) $y = -64\cdot 0{,}5^x$, $x \in \mathbf{N}$; 3) $y = 14\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^x$, $x \in \mathbf{N}$; 4) $q = -2 < 0$, vastav eksponentfunktsioon puudub. **329.** 1) $q = 1$, vastav eksponentfunktsioon puudub; 2) ei ole geomeetriline jada; 3) $q = -1$, vastav eksponentfunktsioon puudub; 4) –5, ei ole geomeetriline jada; 6) $q = 10$, $y = 10^x$, $x \in \mathbf{Z}^+$. **334.** 1) $e^3 < e^5$; 2) $e^{0,2} < e^{0,4}$; 3) $e^8 > e^{-0,08}$; 4) $e^{-3} < e^{-2}$. **335.** 1) $x < 8$; 2) $x > 0$; 3) $x > 1$; 4) $x < 0{,}66$; 5) $x < 4$; 6) $x > 1{,}1$; 7) $x \in \mathbf{R}$; 8) $x > 0$; 9) $x > 0$. **336.** 1) 4; 2) $\frac{1}{3}$; 3) –1; 4) –3; 5) lahend puudub; 6) lahend puudub. **337.** $X = \mathbf{R}$; $X_0 = \varnothing$; $X^+ = \mathbf{R}$; $X^- = \varnothing$; $Y = \{y \mid 1 \le y\}$; $X\uparrow = \{x \mid x > 0\}$; $X\downarrow = \{x \mid x < 0\}$. **340.** 600 (täpsemalt 580) autot ööpäevas, 700 (680) autot, 3400 autot. **341.** 591; 461. **344.** 1) 2; 2) 3; 3) –3; 4) 0,5; 5) lahend puudub; 6) –1,6; 7) –12; 8) lahend puudub; 9) 0; 10) 0; 11) $x \in \mathbf{R}$; 12) ±2; 13) 2; 14) 4; 15) 11. **345.** 1) 2; 2) 0; 2; 3) $5^x = 4$ annab lahendi, kuid selle leidmist õpime hiljem; 4) –1; 0,5; 5) $2^x = 6$ annab lahendi; 6) 1; 2; 7) 3; 8) lahend puudub; 9) 3; 10) 1; 11) $3^x = 2$ annab lahendi; 12) 2. **346.** 1) 2; 2) 0; 3) 0,8; 4) 4. **347.** 1) 3; 2) $\pm\sqrt{2}$; 3) –2; 1; 4) 0; 5) –2; 6) ±3. **348.** 1) ±2; 2) ±2. **361.** 1) 98; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $8\sqrt[3]{25}$; 4) $\frac{2}{81}$; 5) 0,8; 6) 2; 7) 8; 8) $\frac{1}{27}$. **364.** 41; 20; 79. **365.** 27. **379.** 1) 3; 2) $\sqrt[3]{5}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) 2; 5) $\sqrt{a}$; 6) 5. **380.** 1) 64; 2) 2; 3) 9; 4) a. **384.** $X = (0; \infty)$, $x = 1$, $X^+ = (1; \infty)$, $X^- = (0; 1)$, $X\uparrow = X$, $X\downarrow = \varnothing$, ekstreemumkohad puuduvad. **390.** 11) kui $a > b$, siis $\log_4 a > \log_4 b$; kui $a < b$, siis $\log_4 a < \log_4 b$; kui $a = b$, siis $\log_4 a = \log_4 b$; 12) kui $0 < a < 1$, siis $\log_a 1 > \log_a 2$; kui $a > 1$, siis $\log_a 1 < \log_a 2$. **391.** 1) $x > 1$;

2) $0 < x < 1$; 3) $0 < x < 1$; 4) $x > 1$; 5) $x > 6$; 6) $0 < x < 1$; 7) $-\sqrt{2} < x < 1$ või $1 < x < \sqrt{2}$; 8) $\frac{3}{2} < x < \frac{7}{3}$; 9) $-13 < x < -0{,}875$; 10) $x > 5$; 11) $-8 < x < 8$; 12) $x > 2$; 13) $0 < x < 10$; 14) $x > -4{,}91$; 15) $-e < x < 0$; $0 < x < e$. **392.** 1) $x > 0$; 2) $x < 0$; 3) $x > 4$; 4) $x < -1$ või $x > 1$; 5) $x \in \mathbf{R}$, $x \ne 0$; 6) $x > 1{,}5$; 7) $x < -1$ või $x > 2$; 8) $0 < x < 4$; 9) $x > -0{,}5$; 10) $x < 3$ või $x > 7$; 11) $x > 10$; 12) $x < -5$ või $x > 0$. **395.** 1) 2; 2) 5; 3) 2; 4) 10. **396.** 1) 16; $\frac{1}{64}$; 2) 10; $\sqrt[3]{100}$; 3) e^{-3}; $\sqrt{e}$; 4) 0,5; 4. **397.** 1) lahend puudub; 2) $5^{\sqrt{5\pm\sqrt{21}}}$ ehk 2233,4 ja 1,399; 3) e^4; 4) 100; 0,01. **398.** 1) 4,275; 2) 1; 0,5; 3) 2,7; 4) 100. **399.** 1) 100; 0,1; 2) 100; 0,01; 3) 1; 4) ±2. **400.** 1) $x > 1$; 2) 10; 3) 100. **404.** 1) 0,5; 2) $-\sqrt{2}$; 3) –0,5; 4) 4; 5) $\sqrt{3}$; 6) $0{,}5\sqrt{6}$. **406.** $n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

409.–412. 1) $X_0 = \{-\pi; 0; \pi; 2\pi\}$; $X^+ = (0; \pi)$; $X^- = (-\pi; 0) \cup (\pi; 2\pi)$; $X_1\uparrow = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $X_2\uparrow = \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$; $X_1\downarrow = \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$; $X_2\downarrow = \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; 2) sama, mis eelmisel juhul; 3) $X_0 = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$; $X^+ = \left(0; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right)$; $X^- = \varnothing$; $X_1\uparrow = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; $X_2\uparrow = \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$; $X_1\downarrow = \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; $X_2\downarrow = \left(\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right)$; 4) $X_0 = \varnothing$; $X^+ = \varnothing$; $X^- = [0; 2\pi]$; $X_1\uparrow = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; $X_2\uparrow = \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$; $X\downarrow = \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; 5) sama, mis juhul 3; 6) $X_0 = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right\}$; $X^+ = \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right)$; $X^- = \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{17\pi}{6}; 3\pi\right)$; $X_1\uparrow = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; $X_2\uparrow = \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$; $X_1\downarrow = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; $X_2\downarrow = \left(\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right)$; 7) $X_0 = \{0; \pi; 2\pi; 3\pi; 4\pi\}$; $X^+ = (\pi; 2\pi) \cup (3\pi; 4\pi)$; $X^- = (0; \pi) \cup (2\pi; 3\pi)$; $X_1\uparrow = \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; $X_2\uparrow = \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right)$; $X_1\downarrow = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; $X_2\downarrow = \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$; $X_3\downarrow = \left(\frac{7\pi}{2}; 4\pi\right)$; 8) $X_0 = \varnothing$; $X^+ = [0; 4\pi]$; $X^- = \varnothing$; $X_1\uparrow = \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; $X_2\uparrow = \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right)$; $X_1\downarrow = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; $X_2\downarrow = \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$; $X_3\downarrow = \left(\frac{7\pi}{2}; 4\pi\right)$; 9) $X_0 = \{-2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi; 3\pi\}$; $X^+ = (-2\pi; -\pi) \cup (-\pi; 0) \cup (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi) \cup (2\pi; 3\pi)$; $X^- = \varnothing$; $X_1\uparrow = \left(-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right)$; $X_2\uparrow = \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$; $X_3\uparrow = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; $X_4\uparrow = \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$;

$X_3\downarrow=\left(2\pi;\frac{5\pi}{2}\right)$; $X_1\downarrow=\left(-\frac{3\pi}{2};-\pi\right)$; $X_2\downarrow=\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$; $X_3\downarrow=\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$;

$X_4\downarrow=\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$; $X_5\downarrow=\left(\frac{5\pi}{2};3\pi\right)$; 10) $X_0=\left\{-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right\}$; $X^+=\varnothing$;

$X^-=\left(-2\pi;-\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{2};3\pi\right)$;

kasvamis- ja kahanemisvahemikud on samad, mis juhul 9. **413.** 1) punktides $\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi;7\right)$ ja $\left(\frac{3\pi}{2}+2n\pi;-1\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) punktides $\left(\frac{3\pi}{2}+2n\pi;3\right)$ ja $\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi;1\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) punktides $\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi;0,75\right)$ ja $\left(\frac{3\pi}{2}+2n\pi;-0,75\right)$; 4) punktides $\left(\frac{\pi}{2}+n\pi;1\right)$ ja $(n\pi;0)$, $n\in\mathbf{Z}$. **414.** 1) $\frac{\pi}{6}+2n\pi<x<\frac{5\pi}{6}+2n\pi$; 2) $\frac{5\pi}{4}+2n\pi<x<\frac{7\pi}{4}+2n\pi$;

3) $-\frac{\pi}{6}+2n\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2n\pi$; 4) $-\frac{7\pi}{6}+2n\pi<x<\frac{\pi}{6}+2n\pi$; 5) $\frac{\pi}{3}+2n\pi<x<\frac{2\pi}{3}$;

6) $-\frac{\pi}{2}+2n\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2n\pi$; 7) $0,41+2n\pi<x<2,73+2n\pi$;

8) $0,12+2n\pi<x<3,02+2n\pi$; 9) $2,42+2n\pi<x<7+2n\pi$. **415.** 1) $\ldots,\ -\frac{11\pi}{6},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{13\pi}{6},\ \ldots$ ja $\ldots,\ -\frac{7\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{17\pi}{6},\ \ldots$ ehk $x_1=\frac{\pi}{6}+2n\pi$ ja $x_2=\frac{5\pi}{6}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$;

2) $\ldots,\ -\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{13\pi}{4},\ \ldots$ ja $\ldots,\ \frac{-\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4},\ \frac{15\pi}{4},\ \ldots$ ehk $x_1=-\frac{3\pi}{4}+2n\pi$ ja $x_2=-\frac{\pi}{4}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\ldots,\ -\frac{\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6},\ \frac{23\pi}{6},\ \ldots$ ja $\ldots\ -\frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{19\pi}{6},\ \ldots$ ehk $x_1=-\frac{\pi}{6}+2n\pi$ ja $x_2=-\frac{5\pi}{6}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\ldots,\ -\frac{5\pi}{3},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{7\pi}{3},\ \ldots$ ja $\ldots,\ -\frac{4\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3},\ \ldots$ ehk $x_1=\frac{\pi}{3}+2n\pi$ ja $x_2=\frac{2\pi}{3}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$; 5) $\ldots,\ \frac{-3\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \ldots$ ehk $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$; 6) et $\sin 0,72=0,66$, siis lahendid on $x_1=0,72+n\cdot 2\pi=0,72+6,28n$ ja $x_2=2,42+n\cdot 2\pi=2,42+6,28n$, $n\in\mathbf{Z}$.

417. $-\frac{\pi}{2}+n\pi=(2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n\in\mathbf{Z}$. **418.** 1) $X^+=\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi;\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$;

$X^-=\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi;\frac{3\pi}{2}+2n\pi\right)$; 2) $X_n\uparrow=((2n-1)\pi;2n\pi)$; $X_n\downarrow=(2n\pi;(2n+1)\pi)$;

3) punktid $(2n\pi;1)$ ja $((2n+1)\pi;-1)$. **421.–424.** 1) $X_0=\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$;

$X^+=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$; $X^-=\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$; $X_1\uparrow=(-\pi;0)$;

$X_2\uparrow=(\pi;2\pi)$; $X\downarrow=(0;\pi)$; 2) samad, mis eelmisel juhul; 3) $X_0=\varnothing$;

$X^+=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; $X^-=\varnothing$; $X_1\uparrow=\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$; $X_2\uparrow=(\pi;2\pi)$; $X_1\downarrow=(0;\pi)$;

$X_2\downarrow=\left(2\pi;\frac{5\pi}{2}\right)$; 4) $X_0=0$; $X^+=\varnothing$; $X^-=\left(-\frac{3\pi}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; $X\uparrow=(-\pi;0)$;

$X_1\downarrow=\left(-\frac{3\pi}{2};-\pi\right)$; $X_2\downarrow=\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; 5) $X_0=\varnothing$, $X^+=\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$; $X^-=\varnothing$;

$X\uparrow=(\pi;2\pi)$; $X_1\downarrow=(0;\pi)$; $X_2\downarrow=\left(2\pi;\frac{5\pi}{2}\right)$; 6) $X_0=\{0;2\pi\}$; $X^+=\varnothing$;

$X^-=(0;2\pi)$; $X\uparrow=(\pi;2\pi)$; $X\downarrow=(0;\pi)$; 7) $X_0=\left\{-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$;

$X^+=\left(-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$; $X^-=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; $X_1\uparrow=\left(-\frac{3\pi}{2};-\pi\right)$; $X_2\uparrow=(0;\pi)$;

$X_1\downarrow=(-\pi;0)$; $X_2\downarrow=\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$; 8) $X_0=0$; $X^+=\left(-\frac{3\pi}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{3\pi}{2}\right)$; $X^-=\varnothing$;

$X_1\uparrow=\left(-\frac{3\pi}{2};-\pi\right)$; $X_2\uparrow=(0;\pi)$; $X_1\downarrow=(-\pi;0)$; $X_2\downarrow=\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$. **425.** 1) punktides $(2n\pi;7)$ ja $((2n+1)\pi;-1)$; 2) punktides $((2n+1)\pi$ ja $(2n\pi;0)$; 3) punktides $(2n\pi;1,5)$ ja $((2n+1)\pi;-1,5)$; 4) punktides $(n\pi;1)$ ja $\left(\frac{\pi}{2}+n\pi;0\right)$, $n\in\mathbf{Z}$.

426. 1) $-\frac{\pi}{3}+2n\pi<x<\frac{\pi}{3}+2n\pi$; 2) $\frac{\pi}{4}+2n\pi<x<\frac{7\pi}{4}+2n\pi$;

3) $\frac{2\pi}{3}+2n\pi<x<\frac{4\pi}{3}+2n\pi$; 4) $\frac{\pi}{6}+2n\pi<x<\frac{11\pi}{6}+2n\pi$;

5) $-\frac{2\pi}{3}+2n\pi<x<\frac{2\pi}{3}+2n\pi$; 6) $-\frac{\pi}{2}+2n\pi<x<\frac{\pi}{2}+2n\pi$; 7) lahendid puuduvad;

8) $-\pi+2n\pi<x<\pi+2n\pi$; 9) $0,59+2n\pi<x<5,69+2n\pi$. **427.** 1) $\ldots,\ -\frac{12\pi}{4},\ -\frac{\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4},\ \ldots$ ja $\ldots,\ -\frac{7\pi}{4},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{9\pi}{4},\ \ldots$ ehk $x_1=-\frac{\pi}{4}+2n\pi$ ja $x_2=\frac{\pi}{4}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\ldots,\ -\frac{11\pi}{4},\ -\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \ldots$ ja $\ldots,\ -\frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{11\pi}{4},\ \ldots$ ehk $x_1=-\frac{3\pi}{4}+2n\pi$ ja $x_2=\frac{3\pi}{4}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\ldots,\ -\frac{8\pi}{3},\ -\frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3},\ \ldots$ ja $\ldots,\ -\frac{4\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3},\ \ldots$ ehk $x_1=-\frac{2\pi}{3}+2n\pi$ ja $x_2=\frac{2\pi}{3}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\ldots,\ -\frac{13\pi}{6},\ -\frac{\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6},\ \ldots$ ja $\ldots,\ -\frac{11\pi}{6}$

$\frac{\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$, ... ehk $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ ja $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$; $n \in \mathbf{Z}$; 5) ..., $-\frac{17\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$ $\frac{7\pi}{6}$, ... ja ..., $-\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$, ... ehk $x_1 = -\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ ja $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$;

6) $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$; 7) $x_1 = -1{,}16 + 2n\pi = -1{,}16 + 6{,}28 \cdot n$ ja $x_2 = 1{,}16 + 2n\pi = 1{,}16 + 6{,}28 \cdot n$, $n \in \mathbf{Z}$; 8) $x_1 = -0{,}88 + 2n\pi = -0{,}88 + 6{,}28 \cdot n$ ja $x_2 = 0{,}88 + 2n\pi = 0{,}88 + 6{,}28 \cdot n$, $n \in \mathbf{Z}$; 9) $x_1 = -0{,}59 + 2n\pi = -0{,}59 + 6{,}28 \cdot n$ ja $x_2 = 0{,}59 + 2n\pi = 0{,}59 + 6{,}28 \cdot n$, $n \in \mathbf{Z}$. **429.** 1) $X^+ = \left(n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$; $X^- = \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi; n\pi\right)$; 2) $X_0 = \{n\pi\}$; 3) $X_n \uparrow = \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$; $X \downarrow = \varnothing$;

4) puuduvad. **432.** 1) $-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < \frac{\pi}{3} + n\pi$; 2) $-\frac{\pi}{4} + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$;

3) $-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < -\frac{\pi}{3} + n\pi$; 4) $\frac{\pi}{6} + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$; 5) $-1{,}57 + n\pi < x < 0{,}76 + n\pi$;

6) $1{,}20 + n\pi < x < 1{,}57 + n\pi$; $n \in \mathbf{Z}$. **433.** 1) $\frac{\pi}{3} + n\pi$; 2) $-\frac{\pi}{4} + n\pi$; 3) $-\frac{\pi}{3} + n\pi$;

4) $-\frac{\pi}{6} + n\pi$; 5) $\frac{\pi}{6} + n\pi$; 6) $1{,}2 + n\pi$; $n \in \mathbf{Z}$. **435.** Periood on 2π, amplituud on 3. Nimetatud punktid ja piirkonnad ühtivad funktsiooni $y = \sin x$ vastavate punktide ja piirkondadega. **436.** Funktsiooni $y = -\cos x$ periood on 2π, amplituud on 1, funktsiooni $y = -\cos x$ ja $y = -2\cos x$ positiivsuspiirkond on sama, mis funktsiooni $y = \cos x$ negatiivsuspiirkond (vt. ül. 418) ja negatiivsuspiirkond sama, mis $y = \cos x$ positiivsuspiirkond. Analoogiliselt on vahetunud nende funktsioonide kasvamis- ja kahanemisvahemikud ning maksimum- ja miinimumkohad. **437.** Periood on 4π, $X_0 = \{2n\pi\}$; maksimumpunktid $(\pi + 4n\pi; 1)$, miinimumpunktid $(-\pi + 4n\pi; -1)$, $X^+ = (4n\pi; (2n+1)\,2\pi)$; $X^- = ((2n-1)2\pi; 4n\pi)$; $X_n \uparrow = (-\pi + 4n\pi;\ \pi + 4n\pi)$; $X_n \downarrow = (\pi + 4n\pi; 3\pi + 4n\pi)$; $n \in \mathbf{Z}$. **438.** Mõlema funktsiooni periood on $\frac{9\pi}{4}$, amplituud on vastavalt 1 ja 2, paaritud funktsioonid; mõlemal juhul on $X_0 = \left\{n\frac{9\pi}{8}\right\}$; $X^+ = \left(n\frac{9\pi}{4}; n\frac{9\pi}{8}\right)$; $X^- = \left(\frac{9\pi}{8}n; \frac{9\pi}{4}n\right)$; $X_n \uparrow = \left(-\frac{9\pi}{16} + \frac{9\pi}{4}n; \frac{9\pi}{16} + \frac{9\pi}{4}n\right)$; $X_n \downarrow = \left(\frac{9\pi}{16} + \frac{9\pi}{4}n; \frac{27\pi}{16} + \frac{9\pi}{4}n\right)$. Funktsiooni $y = \sin\frac{8}{9}x$ maksimumpunktid on $\left(\frac{9\pi}{16} + \frac{9\pi}{4}n; 1\right)$, miinimumpunktid on $\left(-\frac{9\pi}{16} + \frac{9\pi}{4}n; -1\right)$. Funktsiooni $y = 2\sin\frac{8}{9}x$ korral on need vastavalt $\left(\frac{9\pi}{16} + \frac{9\pi}{4}n; 2\right)$ ja $\left(-\frac{9\pi}{16} + \frac{9\pi}{4}n; -2\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

439. Mõlema funktsiooni periood on π, amplituud on vastavalt 1 ja 1,5, paarisfunktsioonid; mõlemal juhul on $X_0 = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n\right\}$; $X^+ = \left(-\frac{\pi}{4} + n\pi; \frac{\pi}{4} + n\pi\right)$; $X^- = \left(\frac{\pi}{4} - n\pi; \frac{3\pi}{4} + n\pi\right)$, $X_n \uparrow = \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi; n\pi\right)$, $X_n \downarrow = \left(n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$. Funktsiooni $y = \cos 2x$ maksimumpunktid on $(n\pi; 1)$, miinimumpunktid on $\left((2n+1)\frac{\pi}{2}; -1\right)$. Funktsiooni $y = 1{,}5\cos 2x$ korral on need vastavalt $(n\pi; 1{,}5)$ ja $\left((2n+1)\frac{\pi}{2}; -1{,}5\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **440.** Perioodid on vastavalt π ja $\frac{\pi}{3}$. Funktsiooni $y = \tan 3x$ korral: $X_0 = \left\{n \cdot \frac{\pi}{3}\right\}$, $X^+ = \left(\frac{\pi}{3}n; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n\right)$, $X^- = \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n; \frac{\pi}{3}n\right)$, $X_n \uparrow = \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n\right)$, $X \downarrow = \varnothing$. Maksimum- ja miinimumkohad puuduvad.

441. Periood on 2π, $X_0 = \{2n\pi\}$, katkevuskohad ja asümptootide võrrandid on $x = (2n+1)\pi$, $X^+ = (2n\pi, \pi + 2n\pi)$, $X^- = (-\pi + 2n\pi; 2n\pi)$, $X_n \uparrow = (-\pi + 2n; \pi + 2n)$, $X = 0$. **446.** 3) 0,6; 4) –0,8; 5) lahend puudub, sest siinuse väärtus ei saa olla 5; 6) $\frac{7\sqrt{51}}{51} = 0{,}9802$; 7) 0,21; 8) $\frac{\sqrt{9879}}{100} = 0{,}9939$; 9) $\frac{3\sqrt{91}}{91} = 0{,}3145$; 10) $0{,}0128\sqrt{609} = 0{,}3159$. **450.** 4) lahend puudub; 9) –0,875; 10) $0{,}2\sqrt{10} = 0{,}6325$. **454.** $0{,}1\sqrt{2} = 0{,}1414$; 3) $0{,}2\sqrt{5} = 0{,}4472$; 4) $-\frac{8\sqrt{65}}{65} = 0{,}9923$; 5) $-\frac{8}{15} = 0{,}5333$. **458.** 1) $\sin x = 0$, $\sin x = \frac{-4}{3}$ (vastuoluline), $x = n\pi$; 2) $\sin x = 1$, $\sin x = -3$ (vastuoluline), $x = (-1)^n\frac{\pi}{2} + n\pi$ ehk $x = (4k+1)\frac{\pi}{2}$; 3) $\sin x = 3$, vastuoluline; 4) $\sin x = -0{,}2$, $x = (-1)^n 11°32' + n \cdot 180°$, $x = (-1)^{n+1}0{,}2014 + n\pi$; 5) $\sin x = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{3}$; $\sin x \approx -0{,}5352$, $\sin x \approx 1{,}8685$ (lahend puudub), $x \approx (-1)^{n+1}32°22' + n \cdot 180°$ või $x \approx (-1)^{n+1}32°31' + n \cdot 180°$ ehk $x \approx (-1)^{n+1}0{,}5647 + n\pi$; 6) $\sin 2x = 0{,}35$, $\sin 2x = 1$, $x_1 \approx (-1)^n 10°14'30'' + n \cdot 90°$, $x_2 \approx (-1)^n 45° + n \cdot 90°$ ehk $x_1 \approx (-1)^n 0{,}1788 + n \cdot \frac{\pi}{2}$, $x_2 \approx (-1)^n\frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$ ehk $x_2 \approx (4k+1)\frac{\pi}{4}$; 7) $\sin x = 0$, $\sin x = -0{,}4$, $\sin x = 5$ (lahend puudub), $x_1 = n \cdot 180°$, $x_2 \approx (-1)^{n+1}23°35' + n \cdot 180°$ ehk $x_1 = n\pi$, $x_2 \approx (-1)^{n+1}0{,}4115 + n\pi$. **459.** 1) $x = n \cdot \frac{\pi}{2}$;

2) $2\sin x\cdot\cos 60^\circ=0$, $\sin x=0$, $x=n\pi$; 3) $\sin x=\pm 0{,}5$; $x_1=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi$,

$x_2=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$; 4) $\sin 3x\cdot\sin x=0$, $x_1=n\cdot\frac{\pi}{3}$, $x_2=n\pi$; 5) $\sin^2 2x-\sin 2x=0$,

$\sin 2x=0$, $\sin 2x=1$, $x_1=n\cdot\frac{\pi}{2}$ (võõrlahend), $x_2=(-1)^n\frac{\pi}{4}+n\cdot\frac{\pi}{2}$;

$x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+n\cdot\frac{\pi}{2}$ ehk $x=(4k+1)\frac{\pi}{4}$; 6) $\sin x=0{,}5$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$.

460. 1) $x=n\pi$; 2) $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$; 3) $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+n\pi$; 4) $x_1=0$, $x_2=n\pi$ ehk

$x=n\pi$. **462.** 1) $x=\pm\frac{\pi}{4}+2n\pi$; 2) puudub; 3) $x\approx\pm 1{,}8893+2n\pi$; 4) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi$;

5) $x\approx\pm 1{,}6058+2n\pi$, millest $x_1\approx -7{,}8890$, $x_2\approx -4{,}6774$, $x_3\approx -1{,}6058$,
$x_4\approx 1{,}6058$, $x_5\approx 4{,}6774$, $x_6\approx 7{,}8890$; 6) $x\approx\pm 0{,}8992+2n\pi$, millest $x_1\approx 0{,}8992$,
$x_2\approx 5{,}3840$, $x_3\approx 7{,}1824$, $x_4\approx 11{,}6672$, $x_5\approx 13{,}4656$, $x_6\approx 17{,}9504$.

463. 1) $x=\pm\frac{\pi}{4}+n\pi$ ehk $x=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{4}$; 2) puudub; 3) $x=\frac{\pi}{6}+(2n\pm 1)\pi$ ehk

$x=\frac{\pi}{6}+(2k+1)\pi$; 4) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos x=\sqrt{2}$ (lahend puudub), $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2n\pi$;

5) $x=\pm\frac{\pi}{24}+n\cdot\frac{\pi}{4}=(6n\pm 1)\cdot\frac{\pi}{24}$; 6) $\cos x=-0{,}5$, $\cos x=3$ (lahend puudub),

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi=(3n\pm 1)\cdot\frac{2\pi}{3}$; 7) $x=\pm 36^\circ 52'+n\cdot 360^\circ$ ehk $x\approx\pm 0{,}6435+2n\pi$;

8) $\cos x=0$, $\cos x=-3$ (lahend puudub), $x=\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi=(4n+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ ehk

$x=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$; 9) $\cos^2(45^\circ+x)-\sin^2(45^\circ+x)=0$, $\cos(90^\circ+2x)=0$,

$x=45^\circ+(4n+1)45^\circ$ ehk $x=k\cdot 90^\circ$ ehk $x=k\cdot\frac{\pi}{2}$; 10) $\cos(2x+30^\circ)=0{,}5$,

$\cos(2x+30^\circ)=1$, $x_1=\pm\frac{\pi}{6}+n\pi-\frac{\pi}{12}$, $x_2=n\pi-\frac{\pi}{12}$. **464.** 1) $\cos 5x=0$, $\sin x=0$,

$x_1=\pm 0{,}1\pi+0{,}4n\pi$, $x_2=n\pi$ ehk $x_1=0{,}1(2k+1)\pi$, $x_2=k\pi$; 2) $\cos 6x=0$,

$\cos 2x=0$, $x_1=\pm\frac{\pi}{12}+n\cdot\frac{\pi}{3}$, $x_2=\pm\frac{\pi}{4}+n\pi$ ehk $x_1=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{12}$, $x_2=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{4}$;

3) $\sin\frac{13}{12}x=0$, $\cos\frac{5}{12}x=0$, $x_1=\pm\frac{6\pi}{5}+n\cdot\frac{24\pi}{5}$, $x_2=n\cdot\frac{12\pi}{13}$ ehk $x_1=(2k+1)\cdot\frac{6\pi}{5}$;

$x_2=k\cdot\frac{12\pi}{13}$; 4) $\cos x=0$, $x=\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi$ ehk $x=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$; 5) $\sin\frac{3x}{2}=0$,

$\cos\frac{x}{2}=0$, $x_1=n\cdot\frac{2\pi}{3}$, $x_2=\pm\pi+4n\pi$ ehk $x_1=k\cdot\frac{2\pi}{3}$, $x_2=(2k+1)\pi$;

6) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, $x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi$ ehk $x=\frac{\pi}{4}+(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$; 7) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$,

$\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, $x_1=-\frac{\pi}{4}+n\pi$, $x_2=\frac{\pi}{16}+n\cdot\frac{\pi}{4}$; 8) $\sin 6x=\sin 6x$, $x\in\mathbf{R}$;

9) $\cos\frac{3x}{4}=0$, $\cos\frac{x}{4}=0$, $x_1=\pm\frac{2\pi}{3}+n\cdot\frac{8\pi}{3}$, $x_2=2\pi+8n\pi$ ehk $x_1=(2k+1)\cdot\frac{2\pi}{3}$,

$x_2=2(2k+1)\pi$; 10) $\sin x=0$, $\cos x=-1$, $x_1=n\pi$, $x_2=(2n\pm 1)\pi$, $x=n\pi$.

465. 1) $\sin x=0$, $x=n\pi$; 2) $\cos 3x=0$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+n\cdot\frac{2\pi}{3}$ ehk $x=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{6}$;

3) $\cos 5x=0$, $x=\pm 0{,}1\pi+n\cdot\frac{2\pi}{5}$ ehk $x=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{10}$; 4) $\sin x=-1$,

$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2}+n\pi$ ehk $x=(4k-1)\cdot\frac{\pi}{2}$; 5) $\sin 2x=1$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+n\cdot\frac{\pi}{2}$ ehk

$x=(4k+1)\cdot\frac{\pi}{4}$; 6) $\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_1=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+n\pi$, $x_2=(-1)^n\frac{\pi}{4}+n\pi$,

$x=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{4}$. **468.** 7) $\tan x=-1$, $\tan x=-0{,}5$, $x_1=-45^\circ+n\cdot 180^\circ$,

$x_2=-26^\circ 34'+n\cdot 180^\circ$ ehk $x_1=-\frac{\pi}{4}+n\pi$, $x_2\approx -0{,}4636+n\pi$; 8) $\tan 5x=\frac{1}{7}$ ehk

$\tan 5x\approx 0{,}1429$, $\tan 5x=1$, $x_1\approx 1^\circ 38'+n\cdot 36^\circ$; $x_2=9^\circ+n\cdot 36^\circ$ ehk

$x_1\approx 0{,}0284+n\cdot 0{,}6283$; $x_2=\frac{\pi}{20}+n\cdot\frac{\pi}{5}$; 9) $\tan x=0$, $\tan x=0{,}75$, $x_1=n\cdot 180^\circ$,

$x_2\approx 36^\circ 52'+n\cdot 180^\circ$ ehk $x_1=n\pi$, $x_2\approx 0{,}6435+n\pi$; 10) $\tan x=-1$, $\tan x=3$,

$x_1=-45^\circ+n\cdot 180^\circ$, $x_2\approx 71^\circ 34'+n\cdot 180^\circ$ ehk $x_1=-\frac{\pi}{4}+n\pi$, $x_2\approx 1{,}2470+n\pi$.

472. 1) $x_1=(2n+1)\pi$, $\tan\frac{x}{2}=1$, $x_2=(4n+1)\cdot\frac{\pi}{2}$; 2) $7\tan^2\frac{x}{2}-4\tan\frac{x}{2}+1=0$, (lahend

puudub); 3) $(1+\sqrt{2})\cdot\tan^2\frac{x}{2}+2\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}+\sqrt{2}-1=0$,

$\tan\frac{x}{2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}-2=-1{,}3032$, $\tan\frac{x}{2}=2-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}\approx -0{,}1371$,

$x_1\approx -105^\circ+n\cdot 360^\circ$ ehk $x_1\approx -1{,}8326+2n\pi$, $x_2=-15^\circ+n\cdot 360^\circ$ ehk

$x_2=-0{,}2618+2n\pi$; 4) $x_1=\frac{\pi}{3}+n\pi$; $x_2=(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ on lahendiks;

5) $13\tan^2\frac{x}{2}-48\tan\frac{x}{2}-1=0$, $\tan\frac{x}{2}=\frac{24-\sqrt{589}}{13}\approx -0{,}0207$,

$\tan\frac{x}{2}=\frac{24+\sqrt{589}}{13}\approx 3{,}7130$, $x_1\approx -2^\circ 22'+n\cdot 360^\circ$ ehk $x_1\approx -0{,}0414+2n\pi$,

$x_2 \approx 149°52' + n\cdot 360°$ ehk $x_2 \approx 2{,}6154 + 2n\pi$; 6) $11\tan^2\frac{x}{2} + 16\tan\frac{x}{2} - 19 = 0$,

$\tan\frac{x}{2} = \frac{-8+\sqrt{273}}{11} \approx 0{,}7748$, $\tan\frac{x}{2} = \frac{-8-\sqrt{273}}{11} \approx -2{,}2293$, $x_1 \approx 75°32' + n\cdot 360°$ ehk $x_1 \approx 1{,}3184 + 2n\pi$, $x_2 \approx -131°42' + n\cdot 360°$ ehk $x_2 \approx -2{,}2983 + 2n\pi$. **543.** 1) 4; 2) 1; 3) 10; 4) $-\frac{1}{3}$; 5) $2\sqrt{2}$; 6) 6; 7) $5+\sqrt{5}$; 8) 5. **545.** 1) e^5; 2) e; 3) e^{-2}. **546.** 1) 7; 2) $\frac{1}{6}$; 3) 0,5; 4) 1; 5) 1. **548.** 1) $x=-1$; $y=0$; 2) $x=0$; $y=0$; 3) $x=4$; $y=5$. **554.** $v=4t+1$; $v=0{,}8t+1$. **556.** $k=6x$; 1) $k=0$, $\alpha=0°$; 2) $k=2$, $\alpha=63°26'5''$; 3) $k=1$, $\alpha=45°$. **557.** $k=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $k=0{,}1$; $\alpha=5°42'38''$. **558.** 1) $y'=2x$; 2) $y'=5$; 3) $y'=2x+5$; 4) $y'=8x$; 5) $y'=-1$; 6) $y'=8x-1$; 7) $y'=-\frac{2}{x^2}$; 8) $y'=-\frac{6}{(3x+1)^2}$; 9) $y'=1$.

559. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **571.** 1) $y'=-\frac{2x+6}{x^3}$; 2) $y'=-\frac{2}{(x-1)^2}$; 3) $y'=-\frac{8}{x^3}$; 4) $y'=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$; 5) $y'=\frac{48x^2-24x+8}{(1-3x^2)^2}$; 6) $y'=-\frac{10}{x^3}$; 7) $1{,}5\sqrt{x}$; 8) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 9) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 10) $\frac{-1{,}5\sqrt{x}}{x^3}$; 11) $\frac{1}{x\sqrt{x}}$; 12) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **572.** $y'=\frac{10}{(2-3x)^2}$; 1) $y'(0)=2{,}5$; 2) $y'\left(\frac{2}{3}\right)$ puudub; 3) $y'(2)=0{,}625$; 4) $y'(-1)=0{,}4$. **573.** 1) 68°11'54''; 2) puudub; 3) 32°19''; 4) 21°48'5''. **577.** 1) $1{,}5\sqrt{x}$; 2) $\frac{7}{3}x\sqrt[3]{x}$; 3) $-2{,}6x^{-3,6} = -\frac{13\sqrt[5]{x^2}}{5x^4}$; 4) $-0{,}5x^{-1,5} = -\frac{0{,}5}{x\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$; 5) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3x}$; 6) $-2{,}8x^{-3,8} = -\frac{14\sqrt[5]{x}}{5x^4}$.

578. 1) $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{x}$; 2) $y'=1-2x$; 3) $y'=1+6\sqrt{x}+8x$; 4) $y'=1+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{x+\sqrt{x}}{x}$. **579.** 1) $\frac{-3}{(x-2)^2}$; 2) $\frac{2}{x^2}$; 3) $\frac{3x^2+14x}{(x+7)^2}$; 4) $2x+3$; 5) $6x^5-1$; 6) $2x^2$; 7) $\frac{-x^8+4x^5+4x^3-1}{(x-x^4)^2}$; 8) $\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$; 9) 1. **584.** 1) $y'=\frac{5}{2\sqrt{5x+8}}=\frac{5\sqrt{5x+8}}{10x+16}$; 2) $y'=\frac{3x^2}{\sqrt{2x^3-4}}=\frac{3x^2\sqrt{2x^3-4}}{2x^3-4}$; 3) $y'=-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}(x-1)^2}=-\frac{\sqrt{x^2-1}}{(x+1)(x-1)^2}$; 4) $y'=-\frac{1}{8x^2}\sqrt[8]{3x^7}$; 5) $y'=1{,}5x^{11}(x^3-2)^3(x^3-1)$; 6) $y'=-384x(3-x^2)^2$.

585. 1) $y'=\frac{13}{2\sqrt{3x+1}}=\frac{13\sqrt{3x+1}}{6x+2}$; 2) $y'=10x(6x^3-x^2-2)^4\cdot(9x-1)$;

3) $y'=9(x-1)^8$; 4) $y'=\frac{2x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}(x^2+1)^2}=\frac{2x\sqrt{x^4-1}}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$; 5) $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}$; 6) $y'=\frac{7(\sqrt{x}+x)^6(1+2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}=\frac{7(\sqrt{x}+x)^6(\sqrt{x}+2x)}{2x}$. **588.** 4) $y'=-\frac{\cos x}{\sin x}$; 5) $y'=\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$; 8) $y'=\sin 2x$; 13) $y'=-\frac{\tan x}{\cos x}$; 14) $y'=-\sin 2x$; 15) $y'=-0{,}5\tan x\sqrt{\cos x}$; 16) $y'=-\sin x$; 17) $y'=-4\sin 4x$; 18) $y'=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$.

589. 1) $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$; 2) $y'=-2\sin 2x$; 3) $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$; 4) $y'=-4\sin x-\sin 2x$; 5) $y'=2\cos 2x$. **590.** 4) $y'=\frac{1}{1+\sin 2x}$; 5) $y'=\frac{2\sin 2x}{1+\sin 2x}$; 6) $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$; 7) $y'=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\frac{1}{(\cos x-\sin x)^2}=\frac{2}{1-\sin 2x}$. **594.** $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.

596. 1) $y'=0$; 2) $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$; 3) $y'=0$; 4) $y'=1+\ln x$; 5) $y'=2x-\frac{2}{x}$; 6) $y'=-\frac{5}{x^2}-\frac{5}{x\ln 5}$; 7) $y'=-\tan x$; 8) $y'=\frac{2}{\sin 2x}$; 9) $y'=\frac{4x-1}{(2x^2-x)\ln 10}$. **603.** 1) $y'=9\cdot 3^x\cdot\ln 3$; 2) $y'=0{,}01\cdot 10^x\cdot\ln 10$; 3) $y'=16\cdot 2^x-\ln 2$; 4) $y'=e^x+xe^x$; 5) $y'=4\cdot 2^x\cdot\ln 2$; 6) $y'=6^x\cdot\ln 3+6^x\cdot\ln 2$. **604.** 1) $y'=(21x^2-3)\cdot e^{7x^3-3x}$; 2) $y'=\frac{1}{x}4^x\ln 2$; 3) $y'=\frac{1}{xe^x}-\frac{\ln x}{e^x}$; 4) $y'=0{,}5\sqrt{10^x}\ln 10$; 5) $y'=-12^{1-x}\ln 12$; 6) $y'=(3x^2-2x)8^{x^3-x^2}\ln 2$. **607.** 1) $y'=\frac{5\sqrt{\sin 5x}}{2\tan 5x}$; 2) $y'=\frac{3\ln^2 8x}{x}$; 3) $y'=-\sin x$; 4) $y'=\frac{16x^3\tan^3 x^4}{\cos^2 x^4}$. **611.** 1) $y'=\arcsin x$; 2) $y'=\arccos x$. **614.** 1) -21; 2) $-\frac{1}{6}$; 3) 1,75; 4) ∞; 5) 0; 6) 13. **629.** 1) $3x^9$; 2) $-6x^{-4}$; 3) 0; 4) $3^x\ln 3+\frac{1}{x}$; 5) $\sin x+\frac{\tan x}{\cos x}$; 6) $1{,}5\sqrt{x}$; 7) $\frac{3x^2-16x-21}{(x^2+7)^2}$; 8) $-\frac{1}{x^2}$; 9) $-\frac{1}{\sin^2 x}$. **634.** 1) $17(x^3-0{,}5x^2)^{16}(3x^2-x)$; 2) $(5-8x)\cdot\sin(4x^2-5x+3)$; 3) $0{,}5\sqrt{e^x}$; 4) $3\cdot 10^{3x+2}\ln 10$; 5) $\frac{2}{\ln 4\cdot\sin 2x}$; 6) $\frac{2}{x}\ln x$; 7) $\frac{8}{\sqrt{1-(6-8x)^2}}$; 8) $\frac{3x^2}{x^6+1}$. **635.** 1) 5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$; 2) 0 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. **636.** 35 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$; 22 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $1\frac{1}{3}$ s.

637. 1) 9 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$; 0 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; 2) 5 s. **638.** 1) 8 s; 2) 32,9 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$; 9,8 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; 3) 7,8 s. **639.** 490 m;

98 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. **640.** 450; 66 $\frac{\text{bak}}{\text{min}}$. **641.** 1) 2 m; 2) 20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$; 3) üles; 4) 2 s; 22 m; 5) 4,1 s; 6) 21 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. **642.** $\left(0; 2\frac{2}{3}\right)$. **643.** $\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **644.** $\frac{5}{6}\frac{\text{m}}{\text{s}}$. **645.** $\frac{8}{5}\frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$. **646.** –0,5 $\frac{\text{cm}}{\text{min}}$. **647.** 5. **648.** $\sqrt{3}\,\frac{\text{cm}}{\text{min}}$. **651.** 1) 3; 2) 5; 3) 1; 4) –1; 5) $\frac{1}{9}$; 6) 0. **652.** 1) 0; 2) $\frac{1}{\ln 10}$; 3) ±1; 4) $x \in \mathbf{R}$. **653.** 1) $\pm\frac{4}{3}$; 2) 0; 2; 3) 3; 7; 4) 0,5; 3; 5) ∅; 6) ∅. **654.** 1) –0,5; 2) $\frac{1}{3}$. **655.** 1) ∅; 2) $x \in \mathbf{R}$; 3) $(-\infty; -5)\cup(1; \infty)$; 4) $(-\infty; 2)\cup(4; \infty)$; 5) $(-\infty; -2)\cup(0; \infty)$; 6) $x \in \mathbf{R}$ ja $x \neq -0{,}5$. **656.** 1) (0; 1); 2) $\left(n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi\right)$; 3) $\left(\frac{\pi}{4}+n\pi; \frac{3\pi}{4}+n\pi\right)$; 4) $(-\infty; -0{,}5)$. **657.** $|a|<3$. **658.** $a=1$; $b=-2$. **659.** $a=1{,}5$; $b=-1{,}5$. **660.** (0; 1); 45°. **661.** –1; $k=2$. **663.** 1) $y=x-5$; 2) $y=-\sqrt{3}x+2$; 3) $x=0$. **664.** 1) $y=\sqrt{3}(x+1)+3$; 2) $y=-x-5$; 3) $y=0$. **665.** 1) $y=4x-3$; $y=-2x$; 2) $y=14x+11$; $y=-16x+26$; 3) $y=x$; $y=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $y=\frac{2}{9}x-\frac{1}{9}$; $y=\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$; 5) $y=2(1+\ln 2)x-2\ln 2$; $y=x$; 6) $y=\text{e}^{-1}$; $y=3\text{e}^4x-5\text{e}^2$; 7) $y=-1{,}5x-2{,}5$; puudub. **666.** 1) $y=\sqrt{3}x+6$; 2) $y=-\sqrt{3}x+\frac{3+\pi\sqrt{3}}{3}$; 3) $y=-\text{e}^{-1}$; 4) $y=x$. **667.** 1) $y=9x+9$; 2) $y=x$; 3) $y=x\log\text{e}-\log\text{e}$; 4) $y=-x-\text{e}^{-2}$. **668.** $\frac{2}{3}$ m. **669.** $y=-5x+6$. **670.** $y=x+3$. **671.** 1) $y=x+4$; 2) $y=\sqrt{3}x+\ln\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}-2}{2}$; 3) $y=\pm1$; 4) $y=x+\frac{\ln 2-3}{2}$. **672.** $y=0$. **673.** $y=2x-2$. **674.** –12. **675.** (–1; 3); (2; 6). **676.** $y=-5x-13$. **677.** $y=4x-3$; $y=4x+5$. **678.** $y=\pm4x$. **679.** $y=\text{e}x$. **680.** $y=-2$; $y=2x-6$. **682.** 1) $X\uparrow=\mathbf{R}$; $X\downarrow=\varnothing$; 2) $X\uparrow=\varnothing$; $X\downarrow=\mathbf{R}$; 3) $X\uparrow=(1; \infty)$; $X\downarrow=(-\infty; 1)$; 4) $X\uparrow=(0{,}3; \infty)$; $X\downarrow=(-\infty; 0{,}3)$; 5) $X_1\uparrow=(-\infty; -3)$; $X_2\uparrow=(3; \infty)$; $X\downarrow=(-3; 3)$; 6) $X_1\uparrow=(-\infty; 0)$; $X_2\uparrow=(2; \infty)$; $X\downarrow=(0; 2)$; 7) $X\uparrow=\varnothing$; $X\downarrow=\mathbf{R}$; 8) $X\uparrow=\mathbf{R}$; $X\downarrow=\varnothing$; 9) $X_1\uparrow=(-\infty; -5)$; $X_2\uparrow=(1; \infty)$; $X\downarrow=(-5; 1)$; 10) $X_1\uparrow=(-\infty; 2)$; $X_2\uparrow=(4; \infty)$; $X\downarrow=(2; 4)$; 11) $X\uparrow=(0; \infty)$; $X\downarrow=\varnothing$; 12) $X\uparrow=\mathbf{R}$; $X\downarrow=\varnothing$; 13) $X\uparrow=\mathbf{R}$; $X\downarrow=\varnothing$; 14) $X\uparrow=\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi\right)$; $X\downarrow=\varnothing$. 15) $X\uparrow=\mathbf{R}$; $X\downarrow=\varnothing$; 16) $X\uparrow=(10; \infty)$; $X\downarrow=(0; 10)$; 17) $X\uparrow=(-1; \infty)$; $X\downarrow=(-\infty; -1)$; 18) $X\uparrow=(\text{e}^{-1}; \infty)$; $X\downarrow=(0; \text{e}^{-1})$; 19) $X_1\uparrow=(-\infty; -2)$; $X_2\uparrow=(0; \infty)$; $X_1\downarrow=(-2; -1)$; $X_2\downarrow=(-1; 0)$; 20) $X_1\uparrow=(-\infty; 0)$; $X_2\uparrow=(1; \infty)$; $X_1\downarrow=(0; 0{,}5)$; $X_2\downarrow=(0{,}5; 1)$; 21) $X_1\uparrow=(-\infty; -1)$; $X_2\uparrow=(-1; 0)$; $X_3\uparrow=(2; \infty)$;

$X\downarrow=(0; 2)$; 22) $X\uparrow=\{x \in \mathbf{R} / x \neq -0{,}5\}$; $X\downarrow=\varnothing$. **683.** $X\downarrow=(0; 13)$; $X\uparrow=(13; \infty)$. **684.** $X\uparrow=(0; 2)$; $X\downarrow=(2; \infty)$. **685.** $X\uparrow=(0; 2)$; $X\downarrow=(2; \infty)$. **686.** $X\downarrow=(0; 20{,}4)$. **687.** esimesed 10 päeva; alates 11. päevast; esimesed 5 päeva; alates 6. päevast. **688.** 1) $X=[-1; \infty]$; $X\uparrow=(-1; 0)$; $X\downarrow=(0; \infty)$; 2) $X=[-1; 1]$; $X\uparrow=\left(-1; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$; $X\downarrow=\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; 1\right)$. **689.** 1) $X\uparrow=\mathbf{R}$; $X\downarrow=\varnothing$; 2) $X\uparrow=\varnothing$; $X\downarrow=\mathbf{R}$; 3) $X\uparrow=\mathbf{R}$; $X\downarrow=\varnothing$; 4) $X\uparrow=(0{,}5; \infty)$; $X\downarrow=(-\infty; 0{,}5)$; 5) $X\uparrow=(0; \infty)$; $X\downarrow=(-\infty; 0)$; 6) $X\uparrow=\mathbf{R}$; $X\downarrow=\varnothing$; 7) $X\uparrow=(-2; 3)$; $X\downarrow=(3; 8)$; 8) $X\uparrow=(0; 2)$; $X\downarrow=(2; 4)$; 9) $X\uparrow=\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$; $X\downarrow=\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$; 10) $X\uparrow=\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi; \frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$; $X\downarrow=\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi; \frac{3\pi}{2}+2n\pi\right)$; 11) $X\uparrow=\mathbf{R}$ ja $x \neq \pi+2n\pi$; $X\downarrow=\varnothing$; 12) $X\uparrow=\mathbf{R}$ ja $x \neq n\pi$. **691.** [–3; 3]. **692.** [0; 28]. **693.** $(-\infty; -0{,}5]$. **694.** $[4; \infty)$. **695.** $\left[1\frac{1}{7}; \infty\right]$. **696.** (–7; 20). **698.** 1) min $\left(1\frac{1}{4}; -15\frac{1}{8}\right)$; 2) max $\left(\frac{1}{6}; -4\frac{11}{12}\right)$; 3) min (3; –14); max $\left(\frac{1}{3}; -4\frac{4}{12}\right)$; 4) min (3; 3); max (2; 4); 5) min (–1; –6); min (1; –6); max (0; –5); 6) min (3; –26); max (1; 2); 7) min $((2n+1)\pi; -1)$; max $(2n\pi; 1)$; 8) min $((2n+1)\pi; 0)$; max $(2n\pi; 2)$; 9) puuduvad; 10) puuduvad; 11) min (0; 0); max $\left(-2; \frac{4}{\text{e}^2}\right)$; 12) min $\left(\text{e}^{-0{,}5}; -\frac{1}{2\text{e}}\right)$. **699.** 1) –40; –7; 41; 2) –591; 1; 5; 597; 3) 5; 4; 5; 4) 0; –0,5; 0. **700.** 1) 1; –35; 2) 0; –9. **701.** 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **702.** 10.; 2,5%. **703.** 10.; 266. **704.** $t=6$. **705.** 1) 6; –0,25; 2) 0,5; –4; 3) 12; –2; 4) 8; 0. **706.** $a=2$. **707.** $a=-2$; $b=4$. **708.** $a=-2$; $b=-2$. **709.** $a<0$ või $a>6$. **711.** 1) 0; 2) 0; 3) $12x-8$; 4) $-30x$; 5) $\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$; 6) $\frac{36}{x^5}+\frac{2}{9x\cdot\sqrt[3]{x^2}}$; 7) $-\sin x-3\cos x$; 8) $\cos x$; 9) $2\cos 2x$; 10) $-2\cos 2x$; 11) $2\cos x-4x\sin x-x^2\cos x$; 12) $6x\sin x+6x^2\cos x-x^3\sin x$; 13) $\text{e}^{-x}-\frac{1}{x^2}$; 14) $-\frac{\log_a \text{e}}{x^2}$. **712.** 1) 3; 2; 2) 103; 20; 3) 57; 32; 4) –180; –66. **713.** 1) $-\frac{1}{2}$ (min); 2) $\frac{1}{2}$ (max); 3) puudub; 4) puudub; 5) 1 (min); 6) 1 (max). **714.** 1) max (0; –5); min (2; –9); 2) max (–1; 17); min (3; –47); 3) max $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$; min $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$;

4) max (1; 0,5); min (−1; −0,5); 5) min $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; -\frac{1}{2e}\right)$; 6) min $\left(\frac{1}{e}; -\frac{2}{e}\right)$.

715. 1) min (3; −3); max (1; 1); 3 nullkohta; 2) min (2; −13); max (−2; 19); 3 nullkohta; 3) min (1; 5); nullkohad puuduvad; 4) max (2; 52); 2 nullkohta; 5) min (−3; 9); max (−1; 13); 1 nullkoht; 6) min (−1; −6); max (2; 21); 3 nullkohta. **716.** 1) min (1; 0); min (5; 0); 2) min (0; $\sqrt{2}$); 3) max (1; e); 4) puuduvad. **717.** 1) min (1; −6); min (−1; −6); max (0; −5); 2 nullkohta; 2) min (−2; −15); min (2; 15); max (0; 1); 4 nullkohta; 3) min (1; −6); 2 nullkohta; 4) min (−2; −56); 2 nullkohta. **719.** 1) 3; 2) 4. **720.** (−28; 80). **721.** 4, kui $a \in (0; 5)$; 3, kui $a = 5$ või $a = 0$; 2, kui $a < 0$ või $a \in (5; 32)$; 1, kui $a = 32$; 0, kui $a > 32$. **722.** $a = 1$. **723.** 1) $\bar{X} = \mathbf{R}$; 2) $\bar{X} = \mathbf{R}$; 3) $\bar{X} = \mathbf{R}$; 4) $\bar{X} = \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$; $\bar{X} = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right)$. **724.** 1) kui $a > 0$, siis $\bar{X} = \mathbf{R}$; kui $a < 0$, siis $\bar{X} = \mathbf{R}$; 2) kui $a > 0$, siis $\bar{X} = (-\infty; 0)$ ja $\bar{X} = (0; \infty)$; kui $a < 0$, siis vastupidi; 3) $\bar{X} = \mathbf{R}$; 4) kui $a > 0$, siis $\bar{X} = \mathbf{R}$; kui $a < 0$, siis $\bar{X} = \mathbf{R}$; 5) kui $a > 0$, siis $\bar{X} = (0; \infty)$; kui $a < 0$, siis $\bar{X} = (0; \infty)$; 6) kui $a > 0$, siis $\bar{X} = \left(n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ ja $\bar{X} = \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi; n\pi\right)$; kui $a < 0$, siis vastupidi. **725.** 1) $X_k = \{-2; 2\}$; 2) $X_k = \{0; -2\}$; 3) $X_k = \{0,5; 1\}$; 4) $X_k = \{0,5; 2\}$; 5) $X_k = \varnothing$; 6) $X_k = \varnothing$; 7) $X_k = \varnothing$; 8) $X_k = \varnothing$; 9) $X_k = \{1\}$; 10) $X_k = \{2\}$; 11) $X_k = \varnothing$; 12) $X_k = \{\sqrt{2}\}$; 13) $X_k = \varnothing$; 14) $X_k = \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi\right\}$. **726.** 1) $X_e = \{-3; 3\}$; $X_k = \{0\}$; 3 nullkohta; 2) $X_e = \{-2; 2\}$; $X_k = \{0\}$; 3 nullkohta; 3) $X_e = \{-1; 2\}$; $X_k = \{0,5\}$; 3 nullkohta; 4) $X_e = \{-4; 2\}$; $X_k = \{-1\}$; 3 nullkohta; 5) $X_e = \{1\}$; $X_k = \varnothing$; 1 nullkoht; 6) $X_e = \varnothing$; $X_k = \{-2\}$; 1 nullkoht. **727.** 1) $X_e = \{-1; 1\}$; $X_k = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right\}$; 2 nullkohta; 2) $X_e = \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$; $X_k = \{-2; 0; 2\}$; 3 nullkohta; 3) $X_e = \{2\}$; $X_k = \{-1\}$; 2 nullkohta; 4) $X_e = \{0,5\}$; $X_k = \{-1\}$; see, kas $x = 0$ on käänukoht, ei selgu koolis omandatud teadmistega; 2 nullkohta; 5) $X_e = \{1,5\}$; $X_k = \{-3\}$; see, kas $x = 0$ on käänukoht, ei selgu koolis omandatud teadmistega; 2 nullkohta; 6) $X_e = \{-1\}$; $X_k = \{2\}$; see, kas $x = 0$ on käänukoht, ei selgu koolis omandatud teadmistega; 2 nullkohta. **728.** 1) 41 cm; 2) $t = 2$ s; $v = 0$ $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$; $s = 52$ cm; 3) 25 cm; $t = 5$ s; 4) $a = -25$; 5) $X_1 \uparrow = (0; 2)$; $X_2 \uparrow = (5; \infty)$; $X \downarrow = (2; 5)$; 7) $t = 2$; $t = 5$; 8) $X \downarrow = (0; 3,5)$; $X \uparrow = (3,5; \infty)$; 9) $X^- = (2; 5)$; 10) 13,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$; 12) $t = 3,5$ s; 13) $X^- = (0; 3,5)$; $X^+ = (3,5; \infty)$; liikumine on aeglustuv, kui $t \in (0; 2) \cup (3,5; 5)$; liikumine on kiirenev,

kui $t \in (2; 3,5) \cup (5; \infty)$. **729.** 1) $X_0 = \{0; 3\}$; $X_e = \{0; 2\}$; $X_k = \{1\}$; 2) $X_0 = \{0; 1,5\}$; $X_e = \{0; 1\}$; $X_k = \{0,5\}$; 3) $X_0 = \{0\}$; $X_e = \varnothing$; $X_k = \{0\}$; 4) $X_0 = \{0\}$; $X_e = \{0\}$; $X_k = \varnothing$; 5) $X_0 = \{-\sqrt{5}; -1; 1; \sqrt{5}\}$; $X_e = \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$; $X_k = \{-1; 1\}$; 6) $X_0 = \{-1; 1\}$; $X_e = \{0\}$; $X_k = \varnothing$. **730.** minimaalsed kulutused: $k(200) = 600$ (kr.); maksimaalsed kulutused: $k(50) = 825$ (kr.). **731.** $X_0 = \{0\}$; $X_e = \{2; 5\}$; $X_k = \{3,5\}$.

732. 1) $X_0 = \{1\}$; $X_e = \left\{\frac{1}{\sqrt{e}}\right\}$; $X_k = \left\{\frac{1}{e\sqrt{e}}\right\}$; 2) $X_0 = \{1\}$; $X_e = \left\{\frac{1}{e}\right\}$; $X_k = \varnothing$; 3) $X_0 = \{0; 5\}$; $X_e = \{0; 2\}$; $X_k = \{-1\}$; 4) $X_0 = \{0; 2\}$; $X_e = \{0,5\}$; $X_k = \{-1; 0\}$; 5) $X_0 = \{0; 5\}$; $X_e = \{0; 2\}$; $X_k = \{-1\}$; 6) $X_0 = \varnothing$; $X_e = \{0\}$; $X_k = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

733. max (10; 775). **735.** 1) $x = \pm 1$; $y = 0$; 2) $x = -1$; $y = 0$; 3) $x = 1$; $y = 2$; 4) $x = \pm 2$; $y = 3$; 5) $y = 0$; 6) $y = 0$; 7) $y = 2$; 8) $y = 0,5$. **736.** 1) $X_0 = \{-1\}$; $X_e = \varnothing$; $X_k = \varnothing$; püstasümptoot $x = 0$; rõhtasümptoot $y = 1$; 2) $X_0 = \{-1\}$; $X_e = \{-2\}$; $X_k = \{-3\}$; püstasümptoot $x = 0$; rõhtasümptoot $y = 0$; 3) $X_0 = \{1\}$; $X_e = \{2\}$; $X_k = \{3\}$; püstasümptoot $x = 0$; rõhtasümptoot $y = 0$; 4) $X_0 = \{0\}$; $X_e = \{0\}$; $X_k = \varnothing$; püstasümptoodid $x = \pm 1$; rõhtasümptoot $y = -1$. **737.** $a = \pm 6$. **738.** $a > 1,125$. **739.** 1) $X_0 = \{-1\}$; $X_e = \varnothing$; $X_k = \varnothing$; püstasümptoot $x = 1$; rõhtasümptoot $y = -1$; pöördfunktsioon $X_0 = \{1\}$; $X_e = \varnothing$; $X_k = \varnothing$; püstasümptoot $x = -1$; rõhtasümptoot $y = 1$; 2) $X_0 = \varnothing$; $X_e = \{0\}$; $X_k = \varnothing$; püstasümptoot $x = \pm 1$; rõhtasümptoot $y = 1$; pöördfunktsioon $X_0 = \{-1\}$; $X_e = \{-1\}$; $X_k = \varnothing$; püstasümptoot $x = 1$; rõhtasümptoot $y = 1$. **740.** 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **741.** 142; 142. **742.** 15; 15. **743.** −2,5; 2,5. **744.** 0,(6). **745.** 1. **746.** 45°. **747.** 4 m; 8 m. **748.** 8 cm; 8 cm; $8\sqrt{2}$ cm. **749.** $10\sqrt{2}$ cm; 100 cm^2. **750.** 10 cm; 10 cm. **751.** 1. **752.** 2. **753.** 100 kr.; 1000 kr. **754.** 2 kr.; 80 kr. **755.** 10 kr.; 10 000 kr. **756.** 1,5 kr.; 5 kr. **757.** Poiss kasutabki parimat varianti.

758. 7,5 cm. **759.** 10 cm. **760.** 10 cm; 5 cm. **761.** 10 cm; 10 cm. **762.** $\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ cm; $3\sqrt[3]{4}$ cm. **763.** 12 cm. **764.** 20 cm. **765.** (0,6; 2,2). **766.** $\sqrt{5}$. **767.** (2,5; $\sqrt{2,5}$). **768.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$. **769.** 1. **770.** 1. **771.** 6370 m^2. **773.** $\sqrt[4]{3}$ cm. **774.** 10 cm. **775.** $\frac{ab}{4}$. **776.** $\frac{ab}{4}$. **777.** Ei. **778.** 25. **779.** 1. **780.** 2. **781.** $\frac{32\sqrt{3}}{9}$. **782.** 1) 0,0006; 0,06%; 2) 0,2; 0,5%. **783.** 15 cm^2; 0,4%. **784.** 0,8 m^2; 0,7%. **785.** 0,05 cm^2; 0,4%. **786.** 21 cm^2; 2,3%; 64 cm^3; 4%. **788.** 1) (−2; −1); (−1; 0); (1; 2); 2) (0; 1); 3) (2; 3); 4) (−4; −3). **789.** 1) −2,58; 2) −6,13; 3) −1,28; 1,53; 4) 2,09. **791.** 500; 70 bakterit minutis. **792.** 316,6 m; 78,4 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. **793.** 1) 2 m; 2) 15 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$; 3) üles; 4) 1,5 s; 13,25 m; 5) 3,2 s; 6) 16 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. **794.** 1) 11;

2) 2; 3) 0,5; 4) 1. **795.** 1a) $x < 0{,}5$ või $x > 3$; 1b) $x = 0{,}5$; $x = 3$; 1c) $0{,}5 < x < 3$; 2a) $x \in \mathbf{R}$ ja $x \neq -0{,}5$; 2b) puuduvad; 2c) puuduvad. **796.** 1) $y = 2x - 8$; 2) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$;

3) $y = x + 2$; 4) $y = \frac{1}{e}x + 2$. **797.** 1) $X_1\uparrow = (-\infty; 0)$; $X_2\uparrow = (1; \infty)$; $X\downarrow = (0; 1)$;

2) $X_1\uparrow = (-\infty; -1)$; $X_2\uparrow = (3; \infty)$; $X\downarrow = (-1; 3)$. **798.** 1) 6; –3; 2) 1; $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **799.** 1) e^{-1} (min); 2) –1 (min). **800.** 1) (–1; 1); (–2; 2); $X_1\uparrow = (-\infty; -2)$; $X_2\uparrow = (-1; \infty)$; $X\downarrow = (-2; -1)$; üks nullkoht; 2) (1; –1); (2; –2); $X_1\uparrow = (-\infty; 1)$; $X_2\uparrow = (2; \infty)$; $X\downarrow = (1; 2)$; üks nullkoht. **801.** 0,2%; esimesed 8 päeva; alates üheksandast; kaheksandal. **802.** 1) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{81}{16}\right)$; (2; –6); $\breve{X} = (0{,}5; 2)$; $\breve{X}_1 = (-\infty; 0{,}5)$; $\breve{X}_2 = (2; \infty)$;

3) käänupunktid puuduvad; $\breve{X} = \mathbf{R}$; 3) käänupunktid puuduvad; $\breve{X} = \mathbf{R}$; 4) $(n\pi; n\pi)$; $\breve{X} = (2n\pi; (2n+1)\pi)$; $\breve{X} = ((2n-1)\pi; 2n\pi)$; 5) (1; 1); $\breve{X} = (-\infty; 1)$; $\breve{X} = (1; \infty)$; 6) $(-2; -2e^{-2})$; $\breve{X} = (-\infty; -2)$; $\breve{X} = (-2; \infty)$. **803.** 1) $X_0 = \{0; 3\}$; $X_e = \{0; 2\}$; $X_k = \{1\}$; 2) $X_0 = \{-\sqrt{5}; -1; 1; \sqrt{5}\}$; $X_e = \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$; $X_k = \{-1; 1\}$.
804. $X_e = \{2; 5\}$; $X_k = \{3, 5\}$. **805.** 1) $X_0 = \{1\}$; $X_e = \varnothing$; $X_k = \varnothing$; püstasümptoot $x = 0$; rõhtasümptoot $y = 1$; 2) $X_0 = \varnothing$; $X_e = \varnothing$; $X_k = \varnothing$; püstasümptoot $x = 0$; rõhtasümptoot $y = 2$. **806.** 80; 80. **807.** 20 m; 20 m. **808.** 6 cm^2. **809.** π dm^3. **810.** 1 kr.; 12,5%. **811.** $\Delta y = 0{,}2$; 2,5%. **812.** $\Delta s = 1{,}8$ cm^2; 4%. **814.** 1,879. **815.** 0. **816.** 10,2.

817. 10 000. **818.** 336 $\frac{m}{s}$; 1936 m. **820.** 1) ±38,4; 2) –160. **821.** 2 dm, 4 dm, 8 dm.

822. 1 362 000. **823.** 1) $2\frac{2}{15}$; 2) $2\frac{13}{99}$; 3) $3\frac{19}{990}$; 4) $\frac{19}{180}$. **824.** 0,25. **825.** 24π.

826. 2,8 m; 6 m; 8 m; 10 m; ei kunagi. **827.** $P = -0{,}0251x + 52{,}4975$; 2,30 inimest; aastast 2011. **828.** $a < 1$. **829.** 1) $(-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; \infty)$;
2) $(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; \infty)$; 3) $(-\infty; -3) \cup (2; \infty)$; 4) $(-\infty; -1] \cup (2; \infty)$;
5) $[0; 6) \cup (6; \infty)$; 6) $[0; \infty)$. **830.** $y = \sqrt{x^2 + 12756000x}$; 130 m. **831.** 3) paaris;
4) paaritu. **832.** 1) $y = 2x + 8$; 2) $y = (x-2)^3$; 3) puudub; 4) $y = (x+3)^2$, $x \geq 0$.
844. 1) $x = 1$; 2) $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; 3) $x = 2$; 4) $x = 1$; 5) $x = 1$; 6) $x = -0{,}4355$; 7) $x = 1{,}4306$; 8) $x = -3$; 9) $x = 1$; 10) $x = 0{,}25$. **853.** 1) $x > \frac{5}{6}$; 2) $x \in \mathbf{R} \wedge x \neq 0$; 3) $x > 0$; 4) $x > 0$;
5) $x < 0 \vee x > 2$; 6) $x < -0{,}5$. **857.** 1) $x = 27$; 2) $x = 64$; 3) $x_1 = 5$, $x_2 = 5^{25} = 3125^5$;
4) $x_1 = 0{,}09$, $x_2 = 3\frac{1}{3}$; 5) $x = -2$; 6) $x = 5$; 7) $x = 2$; 8) $x_1 = 0{,}01$, $x_2 = 1000$.

863. 1) $x \approx \pm 73°58' + n \cdot 360°$ ehk $x \approx \pm 1{,}2911 + 2n\pi$;
2) $x \approx (-1)^n 26°19' + (n-1) \cdot 180°$ ehk $x \approx (-1)^n 0{,}4594 + (n-1)180°$;

3) $x \approx 20°6'40'' + n \cdot 60°$ või $x \approx 20°7' + n \cdot 60°$ ehk $x \approx 0{,}3510 + n \cdot \frac{\pi}{3}$;

4) $x \approx \pm 5°5' + (6n+1) \cdot 15°$ ehk $x \approx \pm 0{,}0887 + (6n+1) \cdot \frac{\pi}{12}$;

5) $x \approx (-1)^n 36° + (5n+1) \cdot 18°$ ehk $x \approx (-1)^n 0{,}6283 + (5n+1) \cdot \frac{\pi}{10}$; 6) $x \approx -22° + n \cdot 60°$, $x \approx -0{,}4712 + (12n+1) \cdot \frac{\pi}{36}$; 7) $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$, $\cos x = -0{,}5$, $\cos x = 2$ (lahend puudub), $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$; 8) $4\sin^2 x - 17\sin x + 4 = 0$, $\sin x = 0{,}25$, $\sin x = 4$ (lahend puudub), $x \approx (-1)^n 14°29' + n \cdot 180°$ ehk $x \approx (-1)^n 0{,}2527 + n\pi$; 9) $\tan x = 2$, $\tan x = 3$, $x_1 = 63°26' + n \cdot 180°$ ehk $x_1 \approx 1{,}1071 + n\pi$, $x_2 \approx 71°34' + n \cdot 180°$ ehk $x_2 \approx 1{,}2490 + n\pi$; 10) $\tan x = 0$, $\tan x = 2$, $x_1 = n\pi$, $x_2 \approx 63°26' + n \cdot 180°$ ehk $x_2 \approx 1{,}1071 + n\pi$; 11) $\sin x = 0$, $\sin x = 2$ (lahend puudub), $x = n\pi$; 12) $\cos x = 0$, $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_1 = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ehk $x_1 = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi = (8n \pm 1) \cdot \frac{\pi}{4}$.

864. 1) $\sin x = -1$, $\sin x = 0{,}5$, $x_1 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2} + n\pi$, $x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$;

2) $2\cos 2x \cdot \sin x = 0$, $\cos 2x = 0$, $\sin x = 0$, $x_1 = \pm\frac{\pi}{4} + n\pi$, $x_2 = n\pi$; 3) $\tan x = -1{,}5$, $\tan x = 2$, $x_1 \approx -56°19' + n \cdot 180°$, $x_2 \approx 63°26' + n \cdot 180°$ ehk $x_1 \approx -0{,}9828 + n\pi$, $x_2 \approx 1{,}1071 + n\pi$; 4) $\tan x = 1$, $\tan x = 3$, $x_1 = 45° + n \cdot 180°$, $x_2 \approx 71°34' + n \cdot 180°$ ehk $x_1 = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $x_2 \approx 1{,}2490 + n\pi$; 5) $\sin x = 1$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + n\pi$; 6) $\sin 4x = -1$, $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{4}$; 7) $\sin 4x = 0$, $\cos x = 0$, $x_1 = n \cdot \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ehk $x = n \cdot \frac{\pi}{4}$; 8) $\sin x = -3$ (lahend puudub), $\sin x = 1$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + n\pi$; 9) $\tan 3x = 0$, $\cos x = 1$, $x_1 = n \cdot \frac{\pi}{3}$, $x_2 + 2n\pi$ ehk $x = n \cdot \frac{\pi}{3}$; 10) $\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$, millel lahend puudub; 11) $-\cos x = 0$, $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi$; 12) $\sin^3 x \cdot (\cos^3 x - 1) = 0$, $\sin x = 0$, $\cos x = 1$, $x_1 = n\pi$, $x_2 = 2n\pi$. **867.** 1) $x_1 = n \cdot \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = 2n\pi$, $x = n \cdot \frac{2\pi}{3}$;

2) $\sin 2x = 0$, $x = n \cdot \frac{\pi}{2}$; 3) $\cos^2 2x \cdot (5\tan 2x + 11) = 0$, $\cos 2x = 0$, $\tan 2x = -2{,}2$, $x_1 = (4n \pm 1) \cdot \frac{\pi}{4}$ ehk $x_1 = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{4}$, $x_2 \approx -32°47' + n \cdot 90°$ või $x_2 \approx -32°46'30'' + n \cdot 90°$ ehk $x_2 \approx -0{,}5721 + n \cdot \frac{\pi}{2}$; 4) $\sin 2x = 0{,}5$,

$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + n \cdot \frac{\pi}{2}$; teisiti: $\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$, $\cos^2 x = 0$ annab võõrlahendi, $\tan^2 x - 4\tan x + 1 = 0$, $\tan x \approx 0{,}2679$, $\tan x \approx 3{,}7321$, $x_1 \approx 15° + n \cdot 180°$ ehk $x_1 \approx 0{,}2618 + n\pi$, $x_2 \approx 75° + n \cdot 180°$ ehk $x_2 \approx 1{,}3090 + n\pi$;

5) $2\sin(34° + x) \cdot \cos(34° + x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(68° + 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$x = -34° + (-1)^n 22°30' + n \cdot 90°$; teisiti: $0{,}5[\cos(22° - 2x) - \cos 90°] = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

$-\cos(22° - 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = 11° \pm 22°30' + n \cdot 180°$; 6) $\sin 4x \cdot \cos x = 0{,}5\sin(4x + x)$,

$0{,}5(\sin 4x \cdot \cos x - \cos 4x \cdot \sin x) = 0$, $\sin 3x = 0$, $x = n \cdot \frac{\pi}{3}$, teisiti:

$0{,}5(\sin 5x + \sin 3x) = 0{,}5\sin 5x$, $\sin 3x = 0$; 7) $2\sin 2x \cdot \sin x = \sin 2x$, $\sin 2x = 0$,

$\sin x = 0{,}5$. **868.** 1) $\sin x > -1{,}5$, $x \in \mathbf{R}$; 2) $\tan x < 5$, $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi; 1{,}37 + n\pi\right[$;

3) $\cos x > 1$, positiivsuspiirkond puudub; 4) $\sin x > 0$, $]2n\pi; (2n+1)\pi[$.

877. 1) $\frac{5}{2\sqrt{5x+3}}$; 2) $31(36x^2 + 8x)(12x^3 + 4x^2 + 1)^{30}$; 3) $\frac{9}{x}$;

4) $(4x^3 - 2x + 8) \cdot 3^{x^4 - x^2 + 8x + 5} \ln 3$; 5) $5\cos 5x$; 6) $\frac{14x - 0{,}9x^2}{\cos^2(7x^2 - 0{,}3x^3)}$; 7) $\frac{4x}{\sqrt{x^2 + 6}}$;

8) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$. **878.** Tuletised: 1) $-5^{-x} \ln 5$; 2) $\frac{2x \log e}{x^2 - 4}$; 3) $-\cos(4 - 3x)$;

4) $-\frac{6x^2}{\sqrt{1 - 4x^6}}$; **882.** 244; 48 "kivisööjat" päevas. **883.** 0,004 $\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$. **884.** 2 $\frac{\text{cm}}{\text{min}}$.

885. $y = 3x - 1$. **886.** $y = x + 3$. **887.** $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$. **888.** $y = -2x + 4$; $y = x + 1$.

889. 11. **892.** 0,5; 0. **893.** 6,5 $\frac{\text{kr}}{\text{kg}}$. **894.** –0,5. **895.** 12; 12. **896.** $\frac{\sqrt{3} + 6}{11}$ m.

897. $a : h = 2 : 1$. **898.** 0,8. **899.** $X_e = \{0; 2\}$; $X_k = \{1\}$. **900.** 1) $X_0 = \{-2; 1\}$; $X_e = \{-1; 1\}$; $X_k = \{0\}$; 2) $X_0 = \varnothing$; $X_e = \{0\}$; $X_k = \{0{,}5; 1\}$. **901.** 1) $x = 1$; $y = 0$; 2) $x = \pm 3$; $y = 4$; 3) $y = 2$. **902.** 1) $X_0 = \{1\}$; $X_e = \{1\}$; $X_k = \{1{,}5\}$; 2) $X_0 = \{-\frac{2}{3}; 2\}$; $X_e = \{-2\}$; $X_k = \{-3\}$; 3) $X_0 = \{1\}$; $X_e = \left\{-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right\}$; $X_k = \{1\}$. **904.** 0,3 cm; 0,4%.

905. 0,32.

Aineloend

aheljoon 111
algfaas 156
amplituud 153
argumendi diferentsiaal 287
argumendi muut 203
argumendi diferentsiaal 287
aritmeetiline jada (progressioon) 11
aritmeetilise jada üldliige 11
arkusfunktsioonide tuletised 233
arkuskoosinusfunktsioon 161
arkussiinusfunktsioon 158
arkustangensfunktsioon 163
arv e 39, 197
arvjada 3
arvu logaritm 115
arvupaarid 54
arvutustulemuste absoluutne viga 287
arvutustulemuse suhteline e. relatiivne viga 287
aste 87
astmefunktsioon 66, 101
astmefunktsiooni tuletis 220
asümptoot 201, 276
avaldise logaritmimine 118, 120
diferentseerimine 211
diferentsiaalarvutus 211
eksponentfunktsioon 101
eksponentfunktsioon e^x 109
eksponentfunktsiooni tuletis 232
eksponentsiaalne kahanemine 102
eksponentsiaalne kasvamine 102
eksponentvõrrand 112
ekstreemumülesanne 280
Fibonacci jada 6
funktsioon 49
funktsioon *y* = arccos *x* 161
funktsioon *y* = arcsin *x* 157
funktsioon *y* = arctan *x* 163
funktsiooni diferentsiaal 287
funktsiooni ekstreemum 63, 255
funktsiooni ekstreemumkoht 63, 255
funktsiooni ekstreemumpunkt 63, 255
funktsiooni graafiku kumerusvahemik 266
funktsioon graafiku käänukoht 268
funktsiooni graafiku käänupunkt 268
funktsiooni graafiku nõgususvahemik 266
funktsiooni graafiku puutuja 208
funktsiooni graafiku püstasümptoot 277
funktsiooni graafiku rõhtasümptoot 277
funktsiooni kahanemisvahemik 61, 250
funktsiooni kasvamisvahemik* 61, 250
funktsiooni maksimum 255, 260
funktsiooni miinimum 255, 260
funktsiooni muut 202
funktsiooni muutumispiirkond 50, 271
funktsiooni määramispiirkond 50, 271
funktsiooni negatiivsuspiirkond 58, 272
funktsiooni nullkohad 58, 272
funktsiooni pidevus 191, 205
funktsiooni piirväärtus 185, 187
funktsiooni piirväärtuse arvutamine 192
funktsiooni piirväärtuse omadusi 193
funktsiooni positiivsuspiirkond 58, 272
funktsiooni suurim (vähim) väärtus etteantud lõigul 257
funktsiooni teine tuletis 260
funktsiooni tuletis 210
funktsiooni uurimise ülesanne 271
geomeetriline jada (progressioon) 17
geomeetrilise jada üldliige 18
graafik 53
hetkkiirus 206, 238
hääbuv geomeetriline jada 24
hääbuv jada 8
irratsionaalarvulise astendajaga aste 87
jada 3
jada piirväärtus 28
jada tegur 18
jada vahe 11
jada üldliige 3
jagatise tuletis 218
joone puutuja 208, 243
joone puutuja tõus 208, 243
joone puutuja võrrand 247
juurfunktsioon 82
kaareradiaan 136

kahanev funktsioon 251
kasvav funktsioon 251
katkev funktsioon 191
kiirendus 238
kohal x_0 kahanev funktsioon 251
kohal x_0 kasvav funktsioon 251
konstandi tuletis 212
konstantne jada 11
koonduv jada 30
koosinusfunktsioon 144
koosinusfunktsiooni tuletis 227
korrutise tuletis 214
kumer graafik 266
kuupfunktsioon 67
kümnendlogaritm 116
liikumisseadus 206
liitfunktsioon 83, 223
liitfunktsiooni tuletis 224
liitprotsendiline kahanemine 96
liitprotsendiline kasvamine 96
limes 30, 188
lineaarfunktsioon 45
logaritm 115
logaritmfunktsioon 126
logaritmfunktsiooni tuletis 229
logaritmi alus 116, 124
logaritmimine 116, 118
logaritmitav 116
logaritmvõrrand 132
loomulik logaritm 116
lõpmata suur jada 9
lõpmatu piirväärtus 30
lähenemine paremalt ($x \to a+$) 276
lähenemine vasakult ($x \to a-$) 276
murdratsionaalne funktsioon 276
muutuv suurus e. muutuja 49
määramatus 194
naturaallogaritm 116
Newtoni meetod võrrandi ligikaudsel lahendamisel 289
nõgus graafik 266
paarisfunktsioon 75, 144
paaritu funktsioon 76, 148
parabooli haripunkt 47
peegeldus punkti suhtes 71
peegeldus sirge suhtes 70
periood 151
perioodiline funktsioon 144, 151
pidev funktsioon 191, 205
poolestusaeg 100
potentseerimine 118, 120
puutuja tõus 209, 210
pöördfunktsioon 77, 231
pöördfunktsiooni tuletis 231
pöördvõrdeline seos 42
püstasümptoot 277
radiaan 136
ratsionaalarvulise astendajaga aste 87
rekurrentne seos 6
ringi pindala piirväärtusena 37
ringjoone pikkus piirväärtusena 35
ruutfunktsioon 47
rõhtasümptoot 277
siinusfunktsioon 139
siinusfunktsiooni tuletis 226
sinusoid 139
sirge tõus 209
summa tuletis 213
sõltumatu muutuja 50
sõltuv muutuja 50
tabel 54
tangensfunktsioon 148
tangensfunktsiooni tuletis 227
tangensoid 148
trigonomeetriline põhivõrrand 166
trigonomeetriline võrrand 166
tuletis 210
tõkestamata jada 8
tõkestamatult kahanev jada 9
tõkestamatult kasvav jada 9
tõkestatud jada 7
vahe tuletis 216
valem 53
veaarvutus 286
võnkeamplituud 156
võnkeperiood 156
võnkesagedus 156
võrdeline seos 42
üldlahend 168, 174

Sisukord

1. Jadad –
1.1 Jada mõiste –
1.2. Tõkestatud ja tõkestamata jadad.
1.3. Aritmeetiline jada –
1.3.1 Aritmeetilise jada üldliige –
1.3.2. Aritmeetilise jada esimese *n* liikme summa –
1.4. Geomeetriline jada –
1.4.1. Geomeetrilise jada üldliige –
1.4.2. Geomeetrilise jada esimese *n* liikme summa –
1.4.3. Hääbuva geomeetrilise jada summa –
1.5. Jada piirväärtus –
1.5.1. Jada piirväärtuse mõiste –
1.5.2. Piirväärtuse arvutamine –
1.6. Ringjoone pikkus ja ringi pindala piirväärtusena –
1.7. Arv e piirväärtusena –
Enesekontrolliks –

2. Funktsioonid I –
2.1. Kordamine –
2.1.1. Võrdeline ja pöördvõrdeline seos –
2.1.2. Lineaarfunktsioon –
2.1.3. Ruutfunktsioon –
2.2. Funktsiooni mõiste –
2.3. Funktsiooni esitusviisid –
2.4. Funktsiooni nullkohad. Funktsiooni positiivsus- ja negatiivsuspiirkond –
2.5. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine.
Funktsiooni ekstreemumkohad –
2.6. Astmefunktsioonid –
2.7.* Funktsiooni graafiku teisendused –
2.8. Paarisfunktsioon. Paaritu funktsioon –
2.9. Pöördfunktsioon –
2.10. Juurfunktsioonid –
2.11.* Liitfunktsioon –
Enesekontrolliks –

3. Funktsioonid II –
3.1. Reaalarvulise astendajaga aste –
3.2. Liitprotsendiline kasvamine ja kahanemine –
3.3. Eksponentfunktsioon –
3.4. Eksponentfunktsioon $y = e^x$ –
3.5. Eksponentvõrrand –
3.6. Arvu logaritm –
3.7. Avaldise logaritmimine ja potentseerimine –
3.8.* Üleminek logaritmi ühelt aluselt teisele –
3.9. Logaritmfunktsioon –
3.10 Logaritmvõrrand –
3.11. Kordame trigonomeetriat –
3.12. Siinusfunktsioon –
3.13. Koosinusfunktsioon –

3.14. Tangensfunktsioon – 148
3.15. Perioodiline funktsioon – 151
3.16.* Funktsioonid $y = \sin kx$ ja $y = \cos kx$ – 153
3.17.* Funktsioon $y = \arcsin x$ – 157
3.18.* Funktsioon $y = \arccos x$ – 161
3.19.* Funktsioon $y = \arctan x$ – 163
3.20. Trigonomeetriline võrrand – 166
3.21. Võrrandi $\sin x = m$ lahendamine – 167
3.22. Võrrandi $\cos x = m$ lahendamine – 173
3.23. Võrrandi $\tan x = m$ lahendamine – 178
Enesekontrolliks 181

4. Funktsiooni piirväärtus ja tuletis – 185
4.1. Funktsiooni piirväärtus – 185
4.2. Funktsiooni pidevus – 191
4.3. Funktsiooni piirväärtuse arvutamine – 192
4.4. Kaks olulist piirväärtust – 197
4.5.* Asümptoodid – 201
4.6. Funktsiooni muut – 202
4.7. Hetkkiirus – 206
4.8. Funktsiooni graafiku puutuja – 208
4.9. Funktsiooni tuletis – 210
4.10. Funktsiooni summa ja korrutise tuletis – 212
4.11. Funktsioonide jagatise tuletis – 218
4.12. Astmefunktsiooni tuletis – 220
4.13* Liitfunktsiooni tuletis – 223
4.14. Trigonomeetriliste funktsioonide tuletised – 226
4.15. Logaritmfunktsiooni tuletis – 229
4.16.* Pöördfunktsiooni tuletis – 231
4.17. Eksponentfunktsiooni tuletis – 232
4.18.* Arkusfunktsioonide tuletised – 233
Enesekontrolliks – 236

5. Funktsiooni tuletise rakendusi – 238
5.1. Hetkkiirus – 238
5.2. Joone puutuja tõus – 243
5.3. Joone puutuja võrrand – 247
5.4. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine – 250
5.5. Funktsiooni ekstreemumid – 255
5.6.* Ekstreemumi liik ja funktsiooni teine tuletis – 260
5.7.* Funktsiooni graafiku kumerus ja nõgusus. Graafiku käänupunktid – 266
5.8. Funktsiooni uurimine – 271
5.9.* Murdratsionaalsed funktsioonid – 276
5.10. Ekstreemumülesanded – 280
5.11.* Funktsiooni tuletis ligikaudsetes arvutustes – 286
5.11.1. Funktsiooni diferentsiaal. Veaarvutus – 286
5.11.2. Newtoni meetod võrrandi ligikaudse lahendi täpsustamiseks – 289
Enesekontrolliks – 291
Ülesandeid kordamiseks – 293
Vastused – 303
Ainetoend – 325